

ANÁLISIS DE FLUJO TURBULENTO CORTANTE SIMPLE
CARGADO CON PARTÍCULAS

YOVANNI MARCELO MAHECHA TAMAYO

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE OCCIDENTE
FACULTAD DE INGENIERÍAS
DEPARTAMENTO DE ENERGÉTICA Y MECÁNICA
PROGRAMA DE INGENIERÍA MECÁNICA
SANTIAGO DE CALI
2008

ANÁLISIS DE FLUJO TURBULENTO CORTANTE SIMPLE
CARGADO CON PARTÍCULAS

YOVANNI MARCELO MAHECHA TAMAYO

Trabajo de grado para optar al título de
Ingeniero Mecánico

Director
SANTIAGO LAIN BEATOVE
Doctor en Ciencias Físicas

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE OCCIDENTE
FACULTAD DE INGENIERÍAS
DEPARTAMENTO DE ENERGÉTICA Y MECÁNICA
PROGRAMA DE INGENIERÍA MECÁNICA
SANTIAGO DE CALI
2008

Nota de aceptación:

Aprobado por el comité de grado
en cumplimiento de los requisitos
exigidos por la Universidad
Autónoma de Occidente para
optar por el título de Ingeniero
Mecánico

Dr. ROBERTO SOTO
Jurado

Ing. MAURICIO BARRERA
Jurado

Santiago de Cali, Octubre 25 De 2007

Durante la realización de este proyecto y todo su estudio, es indispensable hacer un reconocimiento por su constante apoyo y motivación y gran aporte de conocimiento mi director el Doctor Santiago Lain Beatove, el cual me permitió ser parte del grupo de investigación en Mecánica de fluidos y me involucró en el área computacional, la cual es muy compleja y sin la asesoría de él la realización de este trabajo no hubiese sido posible.

También de igual forma agradecer a mi familia por su total apoyo y por los cuales persevere para alcanzar este logro. En especial agradecer a mi madre Amilvia por su constante lucha y motivación que me permite terminar esta primera meta, a mi padre Marcelo y hermanos Andrés y Karen, gracias por su compañía y ejemplo que me brindaron. A mi tía Diana un especial agradecimiento por su constante ayuda y a Oscar Reinaldo fuente de conocimiento.

AGRADECIMIENTOS

A mi madre, padre y todas las personas que financiaron mi carrera, del cual estoy totalmente agradecido y espero retribuirles este apoyo.

A mis profesores del programa Ingeniería Mecánica gracias por todas sus enseñanzas, conocimiento y experiencias compartidas durante estos cinco años de estudio. A mis compañeros de aula por brindarme su amistad y conocimiento durante esta formación como profesional.

CONTENIDO

	Pág.
INTRODUCCION	17
1. DISPERSION TURBULENTA DE PARTICULAS	20
1.1 CONCEPTOS BASICOS DE UN FLUJO	22
2. RESUMEN DE LA APROXIMACIÓN ANALÍTICA	25
2.1 SOLUCIÓN GENERAL N-DIMENSIONAL	27
2.2 SOLUCIÓN EN DOS DIMENSIONES ESPACIALES	28
2.3 VALORES MEDIOS DE LAS VARIABLES DE LAS PARTÍCULAS	32
2.3.1 Densidad másica promedio	32
2.3.2 Campo de velocidad media de las partículas	32
2.3.3 Esfuerzos de Reynolds de las partículas	32
3. RESULTADOS	34
3.1 TENSORES DE DISPERSIÓN EN EL ESPACIO DE FASE μ y λ	34
3.2 DENSIDAD DE PROBABILIDAD w	41
3.3 CONCENTRACION DE PERFILES DE LAS PARTICULAS	48
3.4 VELOCIDAD MEDIA DE LAS PARTICULAS	58
3.5 LINEAS DE CORRIENTE	62
3.6 VELOCIDADES MEDIAS DEL FLUIDO Y LAS PARTICULAS	64
3.7 ESFUERZOS DE REYNOLDS DE LAS PARTÍCULAS	66
3.8 TENSORES DE DISPERSION TURBULENTA DE PARTICULAS	72
4. CONCLUSIONES	78

BIBLIOGRAFIA

79

ANEXOS

80

LISTA DE TABLAS

Pág.

Tabla 1. Ecuaciones de los esfuerzos de Reynolds de las partículas propuestas por Zaichik. Donde q_{xx} , q_{xy} y q_{yy} son los esfuerzos de Reynolds de las partículas.

67

Tabla 2. Tensores de dispersión de las partículas propuestos por Zaichik.

72

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1. Comportamiento de la componente del tensor de dispersión μ_{11} A. $\beta=0.5$, B. $\beta=1$, C. $\beta=10$. $u_1' u_2' = 0$ y $\alpha=0$.	35
Figura 2. Comportamiento de la componente del tensor de dispersión μ_{12} . A. $\beta=0.5$, B. $\beta=1$, C. $\beta=10$. $\alpha=1$ y $u_1' u_2' = 0$.	36
Figura 3. Comportamiento de la componente del tensor de dispersión μ_{11} . A. $\alpha=0$, B. $\alpha=1$ y C. $\alpha=10$. $u_1' u_2' = 0.5$ y $\beta=1$.	36
Figura 4. Comportamiento de la componente del tensor de dispersión μ_{12} . A. $\alpha=0$, B. $\alpha=1$, C. $\alpha=10$. $u_1' u_2' = 0.5$ y $\beta=1$.	36
Figura 5. Comportamiento de la componente del tensor de dispersión μ_{11} . A. $u_1' u_2' = 0$, B. $u_1' u_2' = 0.5$ y C. $u_1' u_2' = 0.9$. $\alpha=1$ y $\beta=1$.	37
Figura 6. Comportamiento de la componente del tensor de dispersión μ_{12} . A. $u_1' u_2' = 0$, B. $u_1' u_2' = 0.5$ y C. $u_1' u_2' = 0.9$. $\alpha=1$ y $\beta=1$.	37
Figura 7. Comportamiento de la componente del tensor de dispersión μ_{21} . A. $u_1' u_2' = 0$, B. $u_1' u_2' = 0.5$ y C. $u_1' u_2' = 0.9$. $\beta=1$.	37
Figura 8. Comportamiento de la componente del tensor de dispersión μ_{22} . A. $\beta=0.5$, B. $\beta=1$, C. $\beta=5$.	38
Figura 9. Comportamiento de la componente del tensor de dispersión λ_{11} . A. $\beta=0.5$, B. $\beta=1$, C. $\beta=10$. $\alpha=0$ y $u_1' u_2' = 0$.	39
Figura 10. Comportamiento de la componente del tensor de dispersión λ_{12} . A. $\beta=0.5$, B. $\beta=1$, C. $\beta=10$. $\alpha=0$ y $u_1' u_2' = 0.5$.	39
Figura 11. Comportamiento de la componente del tensor de dispersión λ_{11} . A. $\alpha=0$, B. $\alpha=1$, C. $\alpha=10$. $u_1' u_2' = 0.5$ y $\beta=1$.	39
Figura 12. Comportamiento de la componente del tensor de dispersión λ_{12} . A. $\alpha=0$, B. $\alpha=1$, C. $\alpha=10$. $u_1' u_2' = 0.5$ y $\beta=1$.	40
Figura 13. Comportamiento de la componente del tensor de dispersión λ_{11} . A. $u_1' u_2' = 0$, B. $u_1' u_2' = 0.5$, C. $u_1' u_2' = 0.9$. $\alpha=1$ y $\beta=1$.	40

Figura 14. Comportamiento de la componente del tensor de dispersión λ_{12} . A. $u_1' u_2' = 0$, B. $u_1' u_2' = 0.5$, C. $u_1' u_2' = 0.9$. $\alpha = 1$ y $\beta = 1$.	40
Figura 15. Comportamiento de la componente del tensor de dispersión λ_{21} . A. $u_1' u_2' = 0$, B. $u_1' u_2' = 0.5$, C. $u_1' u_2' = 0.9$. $\beta = 1$.	41
Figura 16. Comportamiento de la componente del tensor de dispersión λ_{22} . A. $\beta = 0.5$, B. $\beta = 1$, C. $\beta = 10$.	41
Figura 17. Densidad de probabilidad w para flujo isótropo, $\alpha = 0$ y $t = 1$. Parte superior $\beta = 50$ y parte inferior $\beta = 0.5$.	43
Figura 18. Densidad de probabilidad w . $t = 1$ $\alpha = 0$ y tamaño intermedio. Parte superior $u_1' u_2' = 0.1$ y parte inferior $u_1' u_2' = 0.5$.	44
Figura 19. Densidad de probabilidad w . $t = 5$ $u_1' u_2' = 0$ y $\beta = 1$. Parte superior $\alpha = 1$ y parte inferior $\alpha = 10$.	45
Figura 20. Densidad de probabilidad w , $u_1' u_2' = -0.5$. $\beta = 1$ y $\alpha = 1$. Parte superior $t = 1$ y parte inferior $t = 5$.	46
Figura 21. Densidad de probabilidad w . Para $u_1' u_2' = 0$, $\beta = 50$, $\alpha = 0$, $t = 5$, $x = -0.5$ y $y = 0$.	47
Figura 22. Densidad de probabilidad w . Para $u_1' u_2' = 0$, $\beta = 50$, $\alpha = 0$, $t = 5$, $x = 0$ y $y = 0.5$.	47
Figura 23. Densidad de probabilidad w . Para $u_1' u_2' = 0$, $\beta = 1$, $\alpha = 2$, $t = 1$, $x = 0.5$ y $y = 0.5$.	488
Figura 24. Densidad de probabilidad w . Para $u_1' u_2' = 0.5$, $\beta = 1$, $\alpha = 2$, $t = 1$, $x = 0.5$ y $y = 0.5$.	48
Figura 25. Influencia del esfuerzo de Reynolds en un flujo isótropo. Parte superior resultado del trabajo y parte inferior resultado de Hyland.	50
Figura 26. Influencia del esfuerzo de Reynolds en un flujo no isótropo, $u_1' u_2' = -0.5$. Parte superior resultado del trabajo y parte inferior resultado de Hyland.	51
Figura 27. Concentración de perfiles de partícula, $u_i' u_j' = \delta_{ij}$. $\alpha = 1$, $\beta = 10$ y $t = 5$. Lado izquierdo resultado obtenido y lado derecho resultado de Hyland.	52
Figura 28. Concentración de perfiles de partícula, $u_i' u_j' = \delta_{ij}$. $\alpha = 1$, $\beta = 10$ y $t = 10$. Lado izquierdo resultado obtenido y lado derecho resultado de Hyland.	53

Figura 29. Concentración de perfiles de partícula, $u_i' u_j' = \delta_{ij}$. $\alpha=5, \beta=10$ y $t=5$. Lado izquierdo resultado obtenido y lado derecho resultado de Hyland.	53
Figura 30. Concentración de perfiles de partícula, $u_i' u_j' = \delta_{ij}$. $\alpha=1, \beta=0.5$ y $t=5$. Lado izquierdo resultado obtenido y lado derecho resultado de Hyland.	54
Figura 31. Influencia del esfuerzo de Reynolds en un flujo turbulento no isótropo, para un $t=1$, $u_1' u_2' = 0.1$, $\beta=1$ y $\alpha=0$.	54
Figura 32. Influencia del esfuerzo de Reynolds en un flujo turbulento no isótropo, para un $t=1$, $u_1' u_2' = 0.5$, $\beta=1$, $t=1$ y $\alpha=0$.	55
Figura 33. Influencia del esfuerzo de Reynolds en un flujo turbulento no isótropo, para un $t=1$, $u_1' u_2' = 0.9$, $\beta=1$, $t=1$ y $\alpha=0$.	55
Figura 34. Influencia del esfuerzo de Reynolds en un flujo turbulento no isótropo, para un $t=1$, $u_1' u_2' = -0.5$, $\beta=1$, $t=1$ y $\alpha=1$.	56
Figura 35. Influencia del esfuerzo de Reynolds en un flujo turbulento no isótropo, para un $u_1' u_2' = -0.5$, $\beta=1$, $t=2$ y $\alpha=1$.	56
Figura 36. Influencia del esfuerzo cortante en un flujo turbulento no isótropo, para un $u_1' u_2' = -0.5$, $\beta=1$, $t=3$ y $\alpha=1$.	57
Figura 37. Influencia del esfuerzo cortante en un flujo turbulento no isótropo, para un $u_1' u_2' = -0.5$, $\beta=1$, $t=5$ y $\alpha=1$.	57
Figura 38. Vectores de velocidad media de la partícula, para un $t=5$. a) Resultado obtenido. B) resultado de Hyland.	59
Figura 39. Vectores de velocidad media de la partícula, para un $t=50$. Lado izquierdo resultado obtenido y lado derecho resultado de Hyland.	60
Figura 40. Vectores de velocidad media de la partícula, para un $t=0.5$.	61
Figura 41. Vectores de velocidad media de la partícula, para un $t=1$.	61
Figura 42. Línea de corriente para los vectores velocidad media. Perfiles de círculos concéntricos.	62
Figura 43. Línea de corriente para los vectores velocidad media. Perfiles de elipses rotadas.	63
Figura 44. Línea de corriente para los vectores velocidad media, para un tiempo largo.	63

Figura 45. Línea de corriente para los vectores velocidad media, para un tiempo pequeño.	64
Figura 46. Velocidad media del fluido (A, B) y velocidad media de la partícula (CD). $y=0.1$ A. $\alpha=1$, B. $\alpha=5$, C. $\alpha=1$ y D. $\alpha=5$. $\beta=1$ y $u_1'u_2'=0$.	65
Figura 47. Velocidad media del fluido (A) y velocidad media de la partícula (B, C, D). $y=0.1$ A. $\alpha=1$, B. $\beta=0.5$, C. $\beta=1$ y D. $\beta=50$. $\alpha=1$ y $u_1'u_2'=0$.	65
Figura 48. Velocidad media del fluido (A) y velocidad media de la partícula (B, C, D). $y=0.1$, A. $\alpha=1$, B. $u_1'u_2'=0.1$, C. $u_1'u_2'=0.5$ y D. $u_1'u_2'=0.9$. $\beta=1$. y $\alpha=1$.	66
Figura 49. Velocidad media del fluido (A) y velocidad media de la partícula (B, C, D). $y=0.9$, A. $\alpha=1$, B. $\beta=0.5$, C. $\beta=1$ y D. $\beta=50$. $\alpha=1$ y $u_1'u_2'=0$.	66
Figura 50. Velocidad fluctuante, componente $v_1'v_1'$. A-D. $\beta=0.5$, B-E. $\beta=1$ y C-F. $\beta=50$. $\alpha=1$ y $u_1'u_2'=0$.	69
Figura 51. Velocidad fluctuante, componente $v_1'v_1'$. A-D. $u_1'u_2'=0.1$, B-E. $u_1'u_2'=0.5$ y C-F. $u_1'u_2'=0.9$. $\beta=1$ y $\alpha=1$.	69
Figura 52. Velocidad fluctuante, componente $v_1'v_1'$. A-D. $\alpha=0$, B-E. $\alpha=1$ y C-F. $\alpha=5$. $\beta=1$ y $u_1'u_2'=0$.	70
Figura 53. Velocidad fluctuante, componente $v_1'v_2'$. A-D. $\beta=0.5$, B-E. $\beta=1$ y C-F. $\beta=50$. $\alpha=1$ y $u_1'u_2'=0$.	70
Figura 54. Velocidad fluctuante, componente $v_1'v_2'$. A-D. $u_1'u_2'=0$, B-E. $u_1'u_2'=0.5$ y C-F. $u_1'u_2'=0.9$. Para un $\beta=1$ y $\alpha=1$.	71
Figura 55. Velocidad fluctuante, componente $v_1'v_2'$. A-D. $\alpha=0$, B-E. $\alpha=1$ y C-F. $\alpha=5$. $\beta=1$ y $u_1'u_2'=0$.	71
Figura 56. Velocidad fluctuante, componente $v_2'v_2'$. A-D. $\beta=0.5$, B-E. $\beta=1$ y C-F. $\beta=50$. Para un $\alpha=0$ y $u_1'u_2'=0$.	72
Figura 57. Velocidad fluctuante, componente $v_2'v_2'$. A. $\beta=0.5$, D. $\alpha=0$, E. $\alpha=1$ y F. $\alpha=5$. $\beta=0.5$ y $u_1'u_2'=0$.	72
Figura 58. Comportamiento del tensor de dispersión $D_{p_{xx}}$. A. $\beta=0.5$, B. $\beta=1$, C. $\beta=5$. $\alpha=1$ y $u_1'u_2'=0$.	74
Figura 59. Comportamiento del tensor de dispersión $D_{p_{xy}}$. A. $\beta=0.5$, B. $\beta=1$, C. $\beta=5$. Para un $\alpha=1$ y $u_1'u_2'=0$.	74

Figura 60. Comportamiento del tensor de dispersión D_{pyx} . A. $\beta=0.5$. B. $\beta=1$. C. $\beta=5$. Para un $\alpha=1$ y $u_1'u_2'=0$.	75
Figura 61. Comportamiento del tensor de dispersión D_{pyy} . A. $\beta=0.5$. B. $\beta=1$. C. $\beta=5$. Para un $\alpha=1$ y $u_1'u_2'=0$.	75
Figura 62. Comportamiento del tensor de dispersión D_{pxx} . A. $u_1'u_2'=0.1$, B. $u_1'u_2'=0.5$, y C. $u_1'u_2'=0.9$. $\alpha=1$ y $\beta=1$.	76
Figura 63. Comportamiento del tensor de dispersión D_{pxy} . A. $u_1'u_2'=0.1$, B. $u_1'u_2'=0.5$ y C. $u_1'u_2'=0.9$. $\alpha=1$ y $\beta=1$.	76
Figura 64. Comportamiento del tensor de dispersión D_{pyx} . A. $u_1'u_2'=0.1$, B. $u_1'u_2'=0.5$ y C. $u_1'u_2'=0.9$. $\alpha=1$ y $\beta=1$.	77
Figura 65. Comportamiento del tensor de dispersión D_{pyy} . A. $u_1'u_2'=0.1$ B. $u_1'u_2'=0.5$. C. $u_1'u_2'=0.9$. $\alpha=1$ y $\beta=1$.	77

LISTA DE ANEXOS

	Pág.
Anexo A. tensores de dispersión λ y μ .	80
Anexo B. Comportamiento de las variables; a) σ_{44} , b) σ_{24} , d) σ_{34} , e) σ_{14} y f) σ_{23} , variando en tamaño de la partícula.	81
Anexo C. Comportamiento de las variables; a) σ_{33} , b) σ_{12} , c) σ_{13} , d) σ_{11} , variando en tamaño de la partícula y e) σ_{34} y f) σ_{14} variando el esfuerzo cortante de la partícula.	82
Anexo D. Comportamiento de las variables; a) σ_{23} , b) σ_{33} , c) σ_{12} , d) σ_{13} y f) σ_{11} , variando el esfuerzo cortante de la partícula.	83

RESUMEN

Este trabajo pretende estudiar el comportamiento de la dispersión de partículas en flujos de fluido en régimen turbulento. Se tienen en cuenta algunos conceptos fundamentales de un flujo turbulento, como los son; número de Reynolds, viscosidad, densidad, velocidad, vórtice, línea de corriente y otras que involucran la turbulencia del fluido. Para el desarrollo del modelo matemático y poder obtener las ecuaciones que representan el comportamiento de la dispersión de partículas en un flujo turbulento se sigue la estrategia planteada en Hyland 1999.

En la primera parte de este trabajo, se plantean las condiciones de estudio y las consideraciones tomadas tanto del flujo como de las partículas, se realiza una aproximación analítica para la ecuación cinética de la función de densidad de probabilidad (pdf). Se encuentra la solución general N-dimensional para la pdf, que permite estudiar la inyección de partículas en fluidos en N-espacio dimensional y se encuentra la ecuación para la solución en dos dimensiones espaciales.

Con la ayuda de la herramienta computacional, se ha implementado un paquete de matemática simbólica Mathematica versión 5 (Wolfram, 1989), que permite obtener la ecuación de la pdf de forma explícita. Se obtienen las expresiones medias tanto del fluido y las partículas como lo son; esfuerzos de Reynolds, velocidad media. También se hallan las expresiones para los tensores de dispersión de las partículas planteada por Hyland y las propuestas por Zaichik válida para tiempos largos.

La segunda parte de este trabajo comprende los resultados obtenidos de las ecuaciones simbólicas planteadas. Se toma un valor de referencia igual a uno para la escala temporal integral del fluido. Es importante decir que todas las soluciones propuestas por Hyland son numéricas, debido a la imposibilidad de crear una ecuación simbólica, mientras los resultados obtenidos, son todas soluciones analíticas. Todos los resultados obtenidos son convenientemente normalizados. Se obtienen las soluciones de la densidad de probabilidad (w), en forma de relieve que permiten analizar el comportamiento de las partículas cuando son inyectadas en un punto al fluido. Se hallan los perfiles de concentración de las partículas y se comparan con los resultados de Hyland. Se encuentran las velocidades medias tanto del fluido y las partículas, y se comprueba la tendencia de la velocidad media de las partículas a la velocidad media del fluido. Se hallan los vectores de velocidad de las partículas y se comparan con los resultados propuestos por Hyland. Se encuentran la tendencia de esfuerzos de Reynolds y se comparan con los esfuerzos propuestos por las ecuaciones de Zaichik.

Por último se obtienen los resultados de los tensores de dispersión de Zaichik válidos para largos tiempos en comparación con el tiempo de relajación de la partícula y la escala temporal integral del fluido.

INTRODUCCION

Importancia de los flujos

Un fluido como lo conocemos es una sustancia o medio continuo que se deforma continuamente en el tiempo ante la aplicación de una sollicitación o tensión tangencial sin importar la magnitud de ésta. También se puede definir un fluido como aquella sustancia que, debido a su poca cohesión intermolecular, carece de forma propia y adopta la forma del recipiente que lo contiene.

Se puede encontrar las clases existentes de flujos como los viscosos y no viscosos. Los flujos en donde los efectos de la viscosidad se desprecian se denominan no viscosos. En un fluido no viscoso, la viscosidad del fluido es, μ , se supone igual a cero. Los fluidos con viscosidad cero no existen; sin embargo, hay muchos problemas donde el desprecio de las fuerzas no viscosas simplificará el análisis y, al mismo tiempo conducirá a resultados significativos.

Todos los flujos poseen viscosidad y, en consecuencia, los flujos viscosos son de capital importancia en el estudio de la mecánica de fluidos de medios continuos.

Los regimenes de flujo viscoso se clasifican en laminar o turbulento con base en la estructura del flujo. En régimen laminar, La estructura de flujo se caracteriza por un movimiento continuo ordenado en láminas, o capas. En cambio la estructura de un flujo en régimen turbulento se caracteriza por movimientos tridimensionales, al azar, de partículas de fluido que se suman al movimiento promedio.

En el flujo laminar no hay mezcla microscópica de capas de fluido adyacentes. Un delgado filamento de tinta inyectado en un flujo laminar aparece como una sola línea; no hay dispersión de la tinta por todo el flujo, excepto la dispersión lenta debida al movimiento molecular. Por otra parte un filamento de tinta inyectado en un flujo turbulento se dispersa con rapidez por todo el campo del flujo, esto es, la línea de tinta se descompone en innumerables hilos enmarañados. Este comportamiento del flujo turbulento se debe a las fluctuaciones de velocidad presentes; la mezcla microscópica de partículas de fluido de capas adyacentes da como resultado la rápida dispersión de la tinta.

El delgado filamento de humo que se eleva de un cigarrillo en un lugar sin corrientes brinda una clara imagen de un flujo laminar. A medida que el flujo va ascendiendo se descompone en movimientos aleatorios e irregulares; este es un ejemplo de flujo turbulento.

Un proceso termomecánico en el que interviene un fluido donde coexisten varias fases se conoce como flujo multifásico. Se entiende el término fase como un estado de agregación de la materia con determinadas porciones materiales de una o varias sustancias distinguibles unas de otras por sus saltos significativos de sus propiedades.

En un flujo multifásico se encontrara una fase fluida que se extenderá en toda la región del desarrollo del flujo, a esta fase se le conoce como fase continua, en este fluido ya sea líquido o gas, se encontrarán partes de otra materia o elementos de la misma sustancia en estado distinto del existente en la fase continua. Es conocido como entrafase a la superficie frontera entre las fases. Los flujos multifásicos se podrían clasificar dependiendo de los estados de las diferentes fases como lo son: liquido- sólido; se encuentra en la sedimentación, lechos fluidizados y otros..., gas-sólido; se encuentra en colectores de polvo, lechos fluidizados y otros, gas-liquido; se encuentra en la combustión, contaminación, evaporación, fumigación de cultivos, atomizadores, y otros y liquido-liquido; se encuentran en la homogeneización, contaminación de petróleo en los mares y otros. Cuando un flujo tiene dos o más fases continuas, se entenderá como un flujo con fases separadas. Mientras que si las porciones materiales del resto de las fases consisten en elementos aislados, se habla de un flujo con fase dispersa. Claramente podemos darnos cuenta que cuando un flujo tiene una mezcla de dos sustancias como el agua y el aceite, hay existencia de dos fases separadas. En el caso de que las fases sean gaseosas o líquidas miscibles, la frontera entre ellas se encontrará difusa y deberá definirse de forma conveniente al propósito que se requiera.

Nos podemos dar cuenta que los flujos multifásicos son de gran importancia tanto para el cuerpo humano como para la industria por sus aplicaciones ejemplos son; procesos de transporte, flujo sanguíneo, combustión, fundición... etc.

En el desarrollo de la tecnología ha permitido estudiar procesos de índole compleja que al realizarlos de forma experimental suele ser muy costoso. Todos estos procesos complejos han venido acompañados de modelos de cálculo, que son difícilmente desarrollables sin la ayuda de la tecnología. La necesidad y uso adecuado del aprovechamiento de los recursos han llevado a aumentar los métodos de cálculos de procesos, cuyo desarrollo requieren de un profundo conocimiento de sus bases físicas y una adecuada modelación de los fenómenos involucrados. La modelación numérica de procesos suele ser mucho más barata y sencilla comparándola con la que la experimental.

En la Mecánica de Fluidos se pueden estudiar los tipos de flujos que se presentan; el flujo con mayor presencia tanto en la industria como en otros campos es el turbulento. El análisis y descripción exacta de la dinámica de este flujo es de una profunda teoría. Por eso se ha impulsado a realizar modelaciones numéricas que permitan analizar el comportamiento de fenómenos en donde la turbulencia se ve involucrada y llegar a respuestas muy aproximadas que representan valores significativos del estudio que se realice.

Para ello esta área de la Ingeniería Mecánica tiene un enfoque conocido como la Mecánica Computacional, la cual permite tener bases para obtener resultados por medio de simulaciones numéricas. Para ello aprovechando la tecnología de nuevo milenio, el costo de estudiar el comportamiento de los flujos por medio de computadores a medida que transcurre el tiempo es más económico y su potencia aumenta.

Los modelos de turbulencia, descritos por aproximaciones teórico-numéricas, se han hecho aplicando las ecuaciones de Navier-Stokes, que trata de un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales no lineales que describen el movimiento de un fluido. Estas ecuaciones gobiernan la atmósfera terrestre, las corrientes oceánicas y el flujo alrededor de vehículos o proyectiles y, en general, cualquier fenómeno en todo tipo de fluidos. Se conoce también que la simulación de grandes escalas (LES) es un método donde parte de la física se simula y la otra se modela. En su estado actual LES es capaz de simular las propiedades medias de los flujos turbulentos separados de los flujos lejos, y en general de todos aquellos en los que la generación de energía cerca de la pared no es un efecto dominante.

1. DISPERSION TURBULENTA DE PARTICULAS

La dispersión turbulenta de partículas es un término comúnmente usado para describir los fenómenos de transporte de las partículas que son distinguibles de las partículas de fase continua que exhiben movimiento turbulento. La descripción del movimiento de la fase dispersa es compleja y de gran interés en varios sistemas prácticos. Las aplicaciones que requieren la solución de este problema son tan variadas como lo son; la dispersión de partículas contaminantes pasivas en la atmósfera o sistemas de combustión con el combustible en forma de gotas o partículas. El alcance de este trabajo se limita a la discusión de flujos multifásicos con sólo dos fases diferenciadas de interés: la fase dispersa, o la fase de partículas; y la fase continua, que también se denomina fase fluida. El alcance está todavía más limitado a flujos diluidos cargados con partículas. En estos flujos el problema se simplifica debido a que las interacciones partícula-partícula, como son colisiones y coalescencia, pueden despreciarse.

La configuración considerada es la de flujo turbulento cortante simple en la cual se conocen las soluciones analíticas para la dispersión de partículas desde un punto fuente (Hyland et al., 1999). En ese artículo se plantea la solución general para la función densidad de probabilidad (pdf) en el caso de N dimensiones espaciales que tiene la forma de una Gaussiana multidimensional. Dicha solución depende de varios parámetros tales como la estructura turbulenta del fluido, la escala temporal integral de la turbulencia, el tiempo de relajación de las partículas dispersas, el gradiente de la velocidad media del fluido y del tiempo, así como de las variables del espacio de fase: posición espacial y velocidad. Hyland et al. (1999) evalúan las soluciones de forma numérica en diferentes situaciones ante la imposibilidad de escribir una fórmula simbólica para la función densidad de probabilidad dependiente de tantas variables. Ello significa que se construía la solución numérica para cada caso concreto considerado, y la variación de cualquier parámetro implicaba la realización de una nueva simulación. La estrategia empleada en este trabajo es otra: dado que la potencia y velocidad de los computadores ha aumentado más de un orden de magnitud en los últimos ocho años, se ha implementado la solución analítica propuesta por Hyland et al. (1999) en el paquete de matemática simbólica Mathematica versión 5 (Wolfram, 1988) de forma que la solución para un problema concreto se obtiene evaluando la expresión general. Sin embargo, a pesar de disponer de la solución general para la pdf dependiente tanto de las variables del espacio de fase como del resto de parámetros relevantes del flujo y las partículas, ésta no se puede escribir de forma sencilla en un documento pues es larguísima (varios cientos de páginas cuando se trató de exportar a un documento de texto).

En este trabajo se evalúan las expresiones simbólicas, en el caso de flujo turbulento cortante simple, que representan propiedades de la fase de

partículas (pdf, concentración, velocidades medias y fluctuantes, tensor de dispersión) y se comparan con los resultados presentados en Hyland et al. (1999) y con los resultados asintóticos de Zaichik (1997), válidos para tiempos grandes comparados tanto con la escala temporal integral de la turbulencia del fluido como con el tiempo de relajación de la partícula.

1.1 CONCEPTOS BASICOS DE UN FLUJO

En este apartado se tratará los conceptos e ideas que involucran a un flujo ya se ha de fase continua o fase dispersa. Es necesario conocer la fase continua como lo son sus propiedades para poder predecir el comportamiento de la fase dispersa. En la fase fluida se pueden encontrar algunas propiedades importantes para el estudio de la dispersión de partículas en fase continua como lo es su velocidad media, densidad, viscosidad y turbulencia. El estudio de los modelos de dispersión de partículas dependen de la turbulencia de la fase continua, para esto, con la ayuda de la herramienta computacional se puede estudiar el comportamiento de la fase dispersa, obteniendo resultados aproximados, los cuales están basados en suposiciones razonables o información suministrada de otra fuente que contenga datos experimentales confiables.

Para conocer bien sobre los flujos es importante saber que la razón por la que un flujo puede ser laminar o turbulento tiene que ver con lo que pasa a partir de una pequeña alteración del flujo, una perturbación de los componentes de velocidad. Dicha alteración puede aumentar o disminuir. Cuando la perturbación en un flujo laminar aumenta, cuando el flujo es inestable, este puede cambiar a turbulento y si dicha perturbación disminuye el flujo continua laminar. El flujo turbulento es mas comúnmente desarrollado debido a que la naturaleza tiene tendencia hacia el desorden y esto en términos de flujos significa tendencia hacia la turbulencia.

El flujo turbulento se caracteriza porque el fluido continuamente se mezcla, de forma caótica, como consecuencia de la ruptura de un flujo ordenado de vórtices, que afectan zonas en dirección del movimiento. El flujo del agua en los ríos o el movimiento del aire cerca de la superficie de la tierra son ejemplos típicos de flujos turbulentos.

La vorticidad, es una propiedad local del flujo, se define como dos veces la tasa promedio de la rotación local de dos líneas inicialmente perpendiculares que siguen un elemento fluido, también la vorticidad es un concepto matemático usado en dinámica de fluidos que se puede relacionar con la cantidad de circulación o rotación de un fluido. Los flujos turbulentos tienen niveles altos de vorticidad comparados con los flujos laminares, y debido a este aumento de vorticidad las partículas pequeñas son transportadas por remolinos turbulentos a través del dominio del fluido. Un vórtice puede generarse debido a condiciones particulares del flujo, como es el caso de los vórtices atmosféricos. La estructura se pone en rotación rápida y puede alcanzar velocidades muy importantes. Se pueden hacer visibles cuando atrapan nubes o polvo a su paso. A la escala de laboratorio, los vórtices se pueden crear simplemente al interponer un obstáculo rígido en un flujo uniforme. El caso más conocido y documentado es la creación de vórtices aguas abajo de un cuerpo cilíndrico. La interacción entre remolinos turbulentos y partículas inmersas se conoce como dispersión turbulenta de partículas, debido a que las partículas son inyectadas

en un lugar geométrico en el cual son transportadas debido al movimiento de los vértices en flujos turbulentos. El tamaño de la partícula frente al tamaño del remolino es uno de los parámetros más importante en la determinación del resultados la iteración partícula – vórtice. Otras propiedades que de las cuales depende el transporte de las partículas en los remolinos turbulentos son la viscosidad del fluido, la densidad, densidad de la partícula, turbulencia del flujo y entre otras propiedades de flujo que involucran la energía cinética de la turbulencia.

Diferentes teorías han tratado de explicar el origen y la estructura de la turbulencia. Algunas explican que la turbulencia es debida a la formación de vórtices en la capa límite, como consecuencia de los disturbios que se generan por discontinuidades bruscas existentes en la pared; mientras que otras teorías atribuyen la turbulencia a la influencia del esfuerzo cortante, cuando se presenta un gradiente de velocidades con discontinuidades bruscas. Sin embargo a pesar de las múltiples investigaciones, los resultados obtenidos sobre el desarrollo de la turbulencia no son totalmente satisfactorios, ya que solo pueden estudiarse experimental y teóricamente como un fenómeno estadístico.

Es importante conocer que el numero de Reynolds es aquel que permite diferenciar con un valor la clase de flujo que se este presentando. El régimen de flujo depende de tres parámetros físicos que describen las condiciones del flujo. El primer parámetro es una escala de longitud del campo de flujo, como el espesor de una capa límite o el diámetro de una tubería, si dicha escala de longitud es lo bastante grande, una perturbación del flujo podría aumentar y el flujo podría volverse turbulento. El segundo parámetro es una escala de velocidad tal como un promedio espacial de la velocidad; si la velocidad es lo bastante grande el flujo podría ser turbulento. El tercer parámetro es la viscosidad cinemática; si la viscosidad es lo bastante pequeña, el flujo puede ser turbulento.

Estos tres parámetros se combinan en un solo parámetro conocido como el número de Reynolds (Re), con el cual se puede predecir el régimen de flujo, si $Re > 4000$ el flujo será turbulento.

En la mecánica de fluidos es ventajoso obtener representación visual del campo de flujo, tal representación esta dada por líneas de tiempo, las de trayectoria, las de traza y las de corriente.

Si varias partículas adyacentes de fluido se encuentran, en el campo de flujo se marcan en un instante determinado, forman una línea en el fluido en ese mismo instante; esta línea recibe el nombre de línea en el tiempo. Las observaciones subsecuentes de la línea proporcionan información acerca del campo de flujo.

Una línea de trayectoria es la trayectoria o trazo delineado por una partícula de fluido en movimiento. Para hacer visible una línea de trayectoria podríamos identificar una partícula de fluido en un instante dado con el uso de una tinta.

Después de un breve periodo, tendríamos varias partículas de fluido identificadas en el flujo, las líneas que une estas partículas de fluido se denomina línea de traza.

Las líneas de corriente son trazos dibujados en el campo de flujo de manera que en un instante determinado, sean tangenciales a la dirección del flujo en cualquier punto del campo del mismo. Puesto que las líneas de corriente son tangenciales al vector velocidad, no puede haber flujo a través de una línea de corriente.

Es importante conocer que para simplificar el problema de la dispersión turbulenta de partículas y obtener una modelación mas sencilla. Los flujos turbulentos se definen como homogéneos cuando se asume que las propiedades estadísticas de las variables turbulentas son independientes del espacio de fase. Se habla de una turbulencia isótropa si sus características estadísticas no muestran preferencia alguna por una u otra dirección.

Es importante conocer que la dispersión de partículas en un flujo se puede presentar como un sistema estocástico, debido a que no se conoce el comportamiento de las partículas al ser inyectadas en el flujo. La dirección de las partículas no es conocida. Lo que busca las teorías y simulaciones es conocer el comportamiento de estos sistemas.

Los sistemas estadísticos están relacionados, en control con la imposibilidad de modelizar alguna parte del proceso a estudiar.

Citar un ejemplo industrial: Sensor de nivel

Un caso típico de modelización son las perturbaciones que puede tener una planta, ya sea por una imprecisión en la medición, la aparición de una carga o variación propia de la planta.

- Perturbación de carga: carga mecánica de un motor, olas en un barco, etc. Son generalmente lentas o de bajas frecuencias.
- Error de medición: puede ser un error estático de calibración o con componentes de alta frecuencia muy importantes. Una solución habitual es filtrar esta señal con el consiguiente retardo de la misma.
- Variación de Parámetros: debidas a una variación del punto de trabajo o a derivas del propio sistema.

2. RESUMEN DE LA APROXIMACIÓN ANALÍTICA

Las ecuaciones de evolución de la función de densidad de probabilidad (pdf, por sus siglas en inglés) han demostrado su utilidad en el estudio del comportamiento de los sistemas estocásticos. Ejemplos de su uso son tanto el movimiento Browniano como la teoría cinética de gases. También han sido utilizadas en los últimos años en el modelado de la turbulencia, combustión y dispersión atmosférica. En todos los casos las variables independientes son las variables del espacio de fase del sistema y la ecuación para la pdf describe el transporte de la densidad promedio en el espacio de fase en función de aquellas variables; la solución de la ecuación es la pdf del sistema en cualquier estado conforme el sistema evoluciona aleatoriamente en el tiempo.

Como en la teoría cinética, las ecuaciones del medio continuo que describen la fase dispersa de partículas se obtienen integrando la ecuación para la pdf, convenientemente multiplicada por las potencias apropiadas de la velocidad, sobre todos los estados de velocidad de las partículas en un punto particular del espacio de fase.

Las ecuaciones cinéticas para la pdf son todas ecuaciones de Liouville “promediadas” y como tales pueden derivarse de las ecuaciones dinámicas subyacentes del sistema. Por consiguiente, si el sistema se describe mediante el vector de estado $\mathbf{q} = \{q_1, q_2, \dots, q_N\}$, cuyo movimiento viene determinado por un sistema de N ecuaciones diferenciales,

$$\dot{q}_i(t) = K_i[q_1, q_2, \dots, q_N, t] \quad (1)$$

Con un conjunto apropiado de condiciones iniciales, la ecuación de Liouville para la densidad en el espacio de fase $W(\mathbf{q}, t)$ se escribe

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial (K_i W)}{\partial q_i} = 0$$

debido a que el sistema es estocástico, algunas (no necesariamente todas) de las funciones K_i serán aleatorias y se busca encontrar el valor promedio w de W sobre todas las realizaciones de las K_i , $i = 1, \dots, N$. Convenientemente normalizada, $w(\mathbf{q}, t)$ es entonces la pdf del vector de estado \mathbf{q} . Esto puede obtenerse promediando la ecuación de Liouville sobre todas K_i por lo que dividiendo cada K_i en un valor medio (\bar{K}_i) y una parte fluctuante (K'_i), se obtiene (aplicando una notación mas compacta)

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \cdot \overline{\mathbf{K}} w = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \cdot \langle \mathbf{K}' w \rangle$$

en cual $\overline{\mathbf{K}}$ y \mathbf{K}' son vectores columna. La clase de ecuaciones para la pdf considerada, es aquella para la cual el término $\langle \mathbf{K}' w \rangle$ viene dado por

$$\langle \mathbf{K}' w \rangle = - \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \cdot \mathbf{D} w + \mathbf{\Gamma} w \right\} \quad (2)$$

donde los tensores de dispersión en el espacio de fase están dados más explícitamente por

$$\mathbf{D} = \langle \Delta \mathbf{q}(\mathbf{q}, t | 0) \mathbf{K}'(\mathbf{q}, t) \rangle$$

$$\mathbf{\Gamma} = \left\langle \Delta \mathbf{q}(\mathbf{q}, t | 0) \cdot \frac{\partial \mathbf{K}'(\mathbf{q}, t)}{\partial \mathbf{q}} \right\rangle$$

donde $\Delta \mathbf{q}(\mathbf{q}, t | 0)$ denota los cambios de posición en el espacio de fase en un intervalo de tiempo $[0, t]$ para el sistema, comenzando desde su estado inicial y llegando al estado \mathbf{q} en un tiempo t . $\mathbf{\Gamma}$ es cero si $\mathbf{K}'(\mathbf{q}(t), t)$ es un proceso aleatorio homogéneo y estacionario. En este caso \mathbf{D} es constante en el espacio de fase y función únicamente del tiempo. En el caso particular que interesa aquí, cuando $\mathbf{K}'(t)$ es homogénea, estacionaria y gaussiana, el término de difusión por gradientes en (2) modela $\langle \mathbf{K}' w \rangle$ exactamente.

El interés de este estudio se centra en los efectos mecánicos producidos por el flujo portador sobre la fase de partículas. Por conveniencia se supone que la fase dispersa es monodispersa y diluida con el fin de poder ignorar las colisiones entre las partículas. Además se asume que las partículas suspendidas son suficientemente grandes como para poder ignorar el movimiento Browniano. En estas condiciones, el movimiento de la partícula viene gobernado exclusivamente por las fuerzas aerodinámicas, las cuales se asume que dependen de la velocidad relativa entre la partícula y el flujo portante local. De este modo el espacio de fase viene caracterizado por $\mathbf{q} = [\mathbf{x}, \mathbf{v}]$, donde \mathbf{x} es la posición y \mathbf{v} es la velocidad de la partícula.

Bajo las condiciones de bajo número de Reynolds y partículas pequeñas pero mucho más densas que el fluido, la ecuación general de movimiento para una esfera pequeña rígida inmersa en un flujo turbulento en un medio infinito, se expresa como:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} &= \beta \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \end{aligned}$$

Donde $\dot{\gamma}$ representa la fuerza de resistencia aerodinámica, β es el inverso del tiempo de relajación de la partícula el cual depende tanto de la densidad y diámetro de la partícula como de la densidad y viscosidad del fluido.

En la notación de la ecuación (1)

$$(\bar{\mathbf{K}})^T = [\mathbf{v}, \beta \cdot (\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{v})], \quad (\mathbf{K}')^T = [0, \beta \cdot \mathbf{u}'],$$

donde $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ y $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)$ son las velocidades media y fluctuante de la velocidad del fluido $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Subdividiendo los tensores de dispersión \mathbf{D} y $\mathbf{\Gamma}$ en subtensores \mathbf{D}_{ij} y $\mathbf{\Gamma}_i$ donde $i = 1, 2$ denota el conjunto de componentes \mathbf{x} , \mathbf{v} y $j = 1, 2$ el subconjunto de \mathbf{K}' asociado con \mathbf{x} , \mathbf{v} , entonces \mathbf{D} y $\mathbf{\Gamma}$ son de la forma

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{\Gamma}_2 \end{pmatrix}.$$

La ecuación cinética para la pdf $w(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ queda como

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial w}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \beta \cdot [\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{v}] w = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \mathbf{D}_{22} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{D}_{12} + \mathbf{\Gamma}_2 \right) w \quad (3)$$

A continuación se resumirá el método de solución para la ecuación cinética de la pdf en dimensión N en un dominio infinito para el cual \mathbf{D} es tan solo función de t , y $\bar{\mathbf{K}}$ es lineal en las variables del espacio de fase. En el caso de la dispersión de partículas en flujos turbulentos se tratará el caso en que el flujo medio depende linealmente de la posición \mathbf{x} . Se describirá en detalle la forma de la solución de la dispersión de partículas en el flujo cortante simple bajo la acción de la fuerza de resistencia. Los resultados obtenidos se compararán con los obtenidos por Zaichik (1997) en el límite asintótico $t \rightarrow \infty$.

2.1 SOLUCIÓN GENERAL N-DIMENSIONAL

Como se ha mencionado en la anteriormente, se considera la clase de ecuaciones en derivadas parciales (PDE's) de la forma:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + a_i(\mathbf{x}) \frac{\partial w}{\partial x_i} + b_{ij}(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} = c(t) w \quad (4)$$

Donde $w = w(\mathbf{x}, t)$, con $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, y t son las variables independientes. Las funciones b_{ij} y c son funciones únicamente de t mientras que a_i es una función lineal en \mathbf{x} . La PDE (4) se reescribe como:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \gamma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} (x_j w) + D_{ij} \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \quad (5)$$

donde los elementos de γ y D son funciones solamente de t . Por ejemplo, en una dimensión:

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & D_{12} \\ D_{12} & D_{22} \end{pmatrix}$$

La solución a la ecuación (4) viene dada por (Hyland et al., 1999)

$$w(x, t) = \frac{(\det \sigma(t))^{-1/2}}{(2\pi)^{n/2}} \times \exp\left(-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}^{-1}(t))(x_i - M_i)(x_j - M_j)\right) \quad (6)$$

donde los elementos de M y σ son funciones que satisfacen las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{dM_i}{dt} = -\gamma_{ij} M_j \quad (7)$$

$$\frac{d\sigma_{ij}}{dt} = -\gamma_{in} \sigma_{nj} - \gamma_{jn} \sigma_{ni} + 2D_{ij} \quad (8)$$

Las ecuaciones (7) y (8) podrán resolverse una vez que se especifiquen las condiciones iniciales, las cuales se pueden obtener de la w . Por ejemplo, si la condición inicial para $w(\mathbf{x}, t)$ es una fuente puntual \mathbf{x}'

$$w(\mathbf{x}, t = 0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (9)$$

entonces $M_i(0) = x'_i$ y $\sigma_{ij}(0) = 0$.

Notemos que puesto que (4) es lineal, la superposición de soluciones con condiciones iniciales dadas por (9) es la solución para condiciones iniciales generales.

La solución general en N dimensiones (6) es una gaussiana con media M y matriz de covarianzas σ , las cuales se determinan del conjunto de ecuaciones diferenciales (7) y (8).

2.2 SOLUCIÓN EN DOS DIMENSIONES ESPACIALES

Consideremos la forma general de la ecuación cinética para pdf en dos dimensiones

$$\frac{\partial w}{\partial t} + v_i \frac{\partial w}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial v_i} (\beta_{ij} v_j w) + \frac{\partial}{\partial v_i} (F_i w) = \frac{\partial}{\partial v_i} \left\{ \frac{\partial}{\partial v_j} (\mu_{ji} w) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\lambda_{ji} w) \right\} \quad (10)$$

donde $w(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ es la densidad promedio en el espacio de fase, siendo \mathbf{x} y \mathbf{v} la posición y velocidad de la partícula en un tiempo t , respectivamente. El tiempo de respuesta de la partícula para los cambios de velocidad en dirección i -ésima debido a los cambios en la velocidad del fluido en la dirección j -ésima es β_{ij}^{-1} y \mathbf{F} representa la media de la fuerza aerodinámica. Los elementos de los tensores μ y λ son funciones derivables conocidas.

Consideremos el caso especial donde no se presenten fuerzas externas y tan sólo la fuerza de resistencia, en régimen de Stokes, actúa sobre la partícula. En este caso el promedio de la fuerza aerodinámica puede expresarse como:

$$\mathbf{F} = \beta \bar{\mathbf{u}} = \beta(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$$

y la componente fluctuante \mathbf{f}

$$\mathbf{f} = \beta \mathbf{u}' = (f_1, f_2) = \beta(u'_1, u'_2)$$

donde $\bar{\mathbf{u}}$ es la velocidad media del flujo portador y $\beta^{-1} = \beta \mathbf{I}$ es el tiempo de respuesta de la partícula. Desde ahora nos restringiremos al caso de flujo cortante simple en el que las componentes de $\bar{\mathbf{u}}$ son $\bar{u}_1 = \alpha x_2$ y $\bar{u}_2 = 0$, donde α (gradiente cortante) es una constante. Así (10) se transforma en

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} = & -v_1 \frac{\partial w}{\partial x_1} - v_2 \frac{\partial w}{\partial x_2} - \alpha \beta x_2 \frac{\partial w}{\partial v_1} + \beta \frac{\partial(v_1 w)}{\partial v_1} + \beta \frac{\partial(v_2 w)}{\partial v_2} + \mu_{11}(t) \frac{\partial^2 w}{\partial v_1^2} + (\mu_{12}(t) + \mu_{21}(t)) \\ & \times \frac{\partial^2 w}{\partial v_1 \partial v_2} + \mu_{22}(t) \frac{\partial^2 w}{\partial v_2^2} + \lambda_{11}(t) \frac{\partial^2 w}{\partial v_1 \partial x_1} + \lambda_{21}(t) \frac{\partial^2 w}{\partial v_1 \partial x_2} + \lambda_{12}(t) \frac{\partial^2 w}{\partial v_2 \partial x_1} + \lambda_{22}(t) \frac{\partial^2 w}{\partial v_2 \partial x_2} \end{aligned} \quad (11)$$

Las expresiones explícitas para los tensores μ y λ se presentan en el Anexo A (Hyland et al., 1999).

La ecuación anterior se reescribe en la forma (5)

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \gamma_{ij} \frac{\partial}{\partial \xi_i} (\xi_j w) + D_{ij} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \quad (12)$$

Donde ξ_1, ξ_2, ξ_3 y ξ_4 representan x_1, x_2, v_1 y v_2 respectivamente. Comparando esta ecuación con la expresión (11) se concluye

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\alpha\beta & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_{11}/2 & \lambda_{12}/2 \\ 0 & 0 & \lambda_{21}/2 & \lambda_{22}/2 \\ \lambda_{11}/2 & \lambda_{21}/2 & \lambda_{11} & (\lambda_{12} + \lambda_{21})/2 \\ \lambda_{12}/2 & \lambda_{22}/2 & (\lambda_{12} + \lambda_{21})/2 & \lambda_{22} \end{pmatrix}$$

De las ecuaciones (7) y (8) se tiene

$$\frac{dM_1}{dt} = M_3,$$

$$\frac{dM_2}{dt} = M_4,$$

$$\frac{dM_3}{dt} = \alpha\beta M_2 - \beta M_3,$$

$$\frac{dM_4}{dt} = -\beta M_4,$$

y

$$\frac{d\sigma_{11}}{dt} = 2\sigma_{13},$$

$$\frac{d\sigma_{12}}{dt} = \sigma_{23} + \sigma_{14},$$

$$\frac{d\sigma_{13}}{dt} = \alpha\beta\sigma_{12} - \beta\sigma_{13} + \sigma_{33} + \lambda_{11},$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma_{14}}{dt} &= -\beta\sigma_{14} - \sigma_{34} + \lambda_{12}, \\
\frac{d\sigma_{22}}{dt} &= 2\sigma_{24}, \\
\frac{d\sigma_{23}}{dt} &= \alpha\beta\sigma_{22} - \beta\sigma_{23} + \sigma_{34} + \lambda_{21}, \\
\frac{d\sigma_{24}}{dt} &= -\beta\sigma_{24} + \sigma_{44} + \lambda_{22}, \\
\frac{d\sigma_{33}}{dt} &= 2\alpha\beta\sigma_{23} - 2\beta\sigma_{33} + 2\mu_{11}, \\
\frac{d\sigma_{34}}{dt} &= \alpha\beta\sigma_{24} - 2\beta\sigma_{34} + \mu_{12} + \mu_{21}, \\
\frac{d\sigma_{44}}{dt} &= -2\beta\sigma_{44} + 2\lambda_{22}.
\end{aligned} \tag{13}$$

La solución general de estos dos sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas se puede encontrar explícitamente. Para ello se deben especificar las condiciones iniciales para \mathbf{M} y σ . Como ya se ha comentado se supone que las partículas se inyectan en un punto, el cual, por conveniencia se toma como el $(0, 0, 0, 0)$ en el espacio de fase. Esto implica que las condiciones iniciales para \mathbf{M} y σ son 0. Por consiguiente $\mathbf{M} \equiv 0$ para todo instante de tiempo y sólo se debe calcular σ . Una vez se encuentren los valores para σ , la solución es simplemente

$$w(x_1, x_2, v_1, v_2, t) = \frac{(\det \sigma(t))^{-1/2}}{(2\pi)} \times \exp\left(-\frac{1}{2} \sigma_{ij}^{-1}(t) \xi_i \xi_j\right) \tag{14}$$

que no es sino la particularización a dos dimensiones de la solución general (6). En (14) $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \equiv (x_1, x_2, v_1, v_2)$. Además, el determinante y el inverso de la matriz σ deben ser evaluados.

En este trabajo tanto la resolución del sistema de ecuaciones (13) como la inversa y el determinante de la matriz σ se han obtenido analíticamente utilizando el paquete de matemática simbólica Mathematica, lo cual permite la construcción de la pdf w como función explícita de todas las variables relevantes. Asimismo las expresiones analíticas de las diferentes variables promediadas, tales como la densidad, velocidad media y esfuerzos de

Reynolds para las partículas, se han obtenido con el mismo paquete. Dichas expresiones se presentan en el siguiente epígrafe.

2.3 VALORES MEDIOS DE LAS VARIABLES DE LAS PARTÍCULAS

Siguiendo a Hyland et al. (1999), en dos dimensiones la pdf w en el espacio de fase viene dada por (14) y se puede reescribir en la forma

$$w(x_1, x_2, v_1, v_2, t) = Ae^{-av_1^2 - bv_1v_2 - cv_2^2 - dv_1 - ev_2 - f}$$

donde a , b , c , d , y f son funciones de x_1 , x_2 y t . A es función solo del tiempo. También se asume que $ac \neq 0$, y $4ac \neq b^2$.

2.3.1 Densidad másica promedio. La densidad de masa promedio $\rho(\mathbf{x}, t)$, se obtiene como

$$\begin{aligned} \langle \rho(\mathbf{x}, t) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(x_1, x_2, v_1, v_2, t) dv_1 dv_2 \\ &= \frac{2\pi A}{\sqrt{4ac - b^2}} \exp(-f + \frac{d^2}{4a} + \frac{(2ae - bd)^2}{4a(4ac - b^2)}) \end{aligned}$$

2.3.2 Campo de velocidad media de las partículas. La velocidad media de la partícula, $\bar{\mathbf{v}} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ está definida por

$$\begin{aligned} \bar{v}_1(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{\langle \rho(\mathbf{x}, t) \rangle} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v_1 w(x_1, x_2, v_1, v_2, t) dv_1 dv_2 \\ &= \frac{be - 2ae}{4ac - b^2}. \end{aligned} \tag{15a}$$

Igualmente para $\bar{v}_2(\mathbf{x}, t)$

$$\bar{v}_2(\mathbf{x}, t) = \frac{bd - 2ae}{4ac - b^2}. \tag{15b}$$

2.3.3 Esfuerzos de Reynolds de las partículas. La velocidad fluctuante de la partícula está dada por $\mathbf{v}' = (\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}})$, donde $\bar{\mathbf{v}}$ es la velocidad media de la partícula. Por consiguiente, los esfuerzos de Reynolds de la partícula se encuentran como $\overline{v'_i v'_j} = \overline{v_i v_j} - \bar{v}_i \bar{v}_j$. Las componentes de $\overline{v'_i v'_j}$ son:

$$\overline{v_i v_j} = \frac{1}{\langle \rho(x, t) \rangle} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v_i v_j w(x_1, x_2, v_1, v_2, t) dv_1 dv_2. \quad (16)$$

Por ejemplo

$$\begin{aligned} \overline{v_1 v_1} &= \frac{1}{\langle \rho(x, t) \rangle} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v_1 v_1 w(x_1, x_2, v_1, v_2, t) dv_1 dv_2 \\ &= \frac{1}{2a} + \frac{b^2}{2a(4ac - b^2)} + \frac{(be - 2cd)^2}{(4ac - b^2)^2} \end{aligned}$$

usando esta ecuación, (15a,b) y la definición de esfuerzos de Reynolds de la partícula, éstos son

$$\overline{v_1' v_1'} = \frac{2c}{4ac - b^2} \quad (17a)$$

Similarmente

$$\overline{v_1' v_2'} = \frac{-b}{4ac - b^2} \quad (17b)$$

y

$$\overline{v_2' v_2'} = \frac{2a}{4ac - b^2} \quad (17c)$$

3. RESULTADOS

3.1 TENSORES DE DISPERSIÓN EN EL ESPACIO DE FASE μ y λ

En esta sección se mostrarán los resultados obtenidos evaluando las soluciones analíticas del flujo cortante simple cargado con partículas. Se analizará tanto el efecto de variar los parámetros del fluido como de las partículas. En el caso de los tensores μ y λ se estudiará su dependencia de los diferentes parámetros en función del tiempo t . Las componentes de dichos tensores son funciones que dependen de siete parámetros $(t, \alpha, \beta, \tau, u'_1 u'_1, u'_1 u'_2, u'_2 u'_2)$ y se muestran en el Anexo A. De su inspección se puede comprobar que las cuatro componentes de ambos tensores, $\mu_{11}, \mu_{12}, \mu_{21}, \mu_{22}$, y $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{21}$ y λ_{22} son diferentes. τ representa la escala temporal integral de la turbulencia del flujo, la cual constituye la escala temporal de referencia, y en este trabajo se ha tomado igual a la unidad, i.e., $\tau=1$. La turbulencia del flujo se supone conocida, la cual, siguiendo la estrategia de Hyland et al. (1999) se ha tomado como $u'_1 u'_1 = u'_2 u'_2 = 1$ mientras que el valor de $u'_1 u'_2$ es variable. Obsérvese que $u'_1 u'_2$ debe cumplir la relación

$$|u'_1 u'_2| \leq \sqrt{u'_1 u'_1} \sqrt{u'_2 u'_2} = 1$$

pero puede ser tanto positivo como negativo. El tiempo de relajación de la partícula está representado por β^{-1} . Cuando se presentan valores de β muy grandes, se dirá que la partícula es “pequeña”, lo contrario ocurre para valores β pequeños y la partícula se dirá “grande”. El esfuerzo cortante está representado por $\alpha = d\bar{u}_1 / dx_2$.

En las gráficas subsiguientes las curvas **A**, **B** y **C** representan casos específicos de las componentes de los tensores μ y λ .

En las Figuras 1 y 2 pueden observarse los comportamientos de las componentes μ_{11} y μ_{12} frente al valor de β . En la Figura 1 no hay presencia de esfuerzo cortante ni esfuerzo de Reynolds mientras que la Figura 2 tiene $\alpha=1$ (para obtener valores diferentes de cero) y el valor del esfuerzo de Reynolds es cero. Cuando la partícula es muy pequeña su reacción al flujo es rápida y, por tanto, los valores de las funciones μ_{11} y μ_{12} son altos. Este hecho se observa en las respuestas **C** de las Figuras 1 y 2. Por el contrario cuando las partículas son de tamaño grande, su respuesta al flujo es más lenta y los valores de μ_{11} y μ_{12} son sensiblemente menores, como se observa en las curvas **A**. Conforme se inyectan partículas mayores, el tiempo necesario para alcanzar el equilibrio con el flujo aumenta mientras que los valores de μ_{11} y μ_{12} disminuyen. El efecto del esfuerzo cortante α sobre μ_{11} y μ_{12} se presenta en las Figuras 3 y 4.

En ellas se considera $\alpha=0$, $\alpha=1$ y $\alpha=10$ con un valor fijo $u_1' u_2' = 0.5$. Las funciones μ_{11} y μ_{12} tienen formas similares pero difieren en el tiempo requerido para alcanzar los valores de equilibrio. En ambos casos, la tendencia del tiempo de estabilización de la respuesta **A** es más corto que en **B** y **C** caracterizados por esfuerzos cortantes mayores. El efecto de modificar los esfuerzos de Reynolds $u_1' u_2'$ ($u_1' u_2' = 0$, $u_1' u_2' = 0.5$ y $u_1' u_2' = 0.9$) manteniendo constantes $\alpha=1$ y $\beta=1$ (partículas de tamaño intermedio) se presenta en las Figuras 5 y 6. En ellas se observa que al aumentar el valor de $u_1' u_2'$ los tiempos necesarios para alcanzar el equilibrio para μ_{11} y μ_{12} aumentan, así como también sus valores de equilibrio. Nótese en las expresiones del Anexo A que la función μ_{21} no depende del esfuerzo cortante. La variación del esfuerzo de Reynolds para $\beta=1$ permite ver en la Figura 7 la tendencia temporal de μ_{21} en las curvas **A**, **B** y **C** para los mismos valores de $u_1' u_2'$ que en las Figuras 5 y 6. Es necesario resaltar que el valor de μ_{21} es menor que el de μ_{12} en la Figura 6, es decir el tensor de dispersión μ es asimétrico. Por otro lado, y según las expresiones del Anexo A, la componente μ_{22} no depende del esfuerzo cortante α ni de $u_1' u_2'$, es decir, mantiene el valor para un flujo homogéneo. Por tanto, tan sólo el efecto de la variación de μ_{22} frente a β se ilustra en la Figura 8: conforme β aumenta, el tiempo necesario para el equilibrio disminuye y el valor de μ_{22} se incrementa como consecuencia de la respuesta más rápida de las partículas al flujo.

Figura 1. Comportamiento de la componente del tensor de dispersión μ_{11}
A. $\beta=0.5$, B. $\beta=1$, C. $\beta=10$. $u_1' u_2' = 0$ y $\alpha=0$

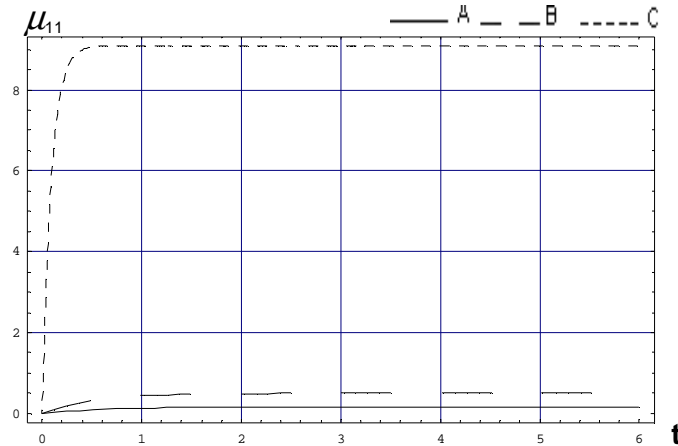


Figura 2. Comportamiento de la componente del tensor de dispersión μ_{12} .
A. $\beta=0.5$, B. $\beta=1$, C. $\beta=10$. $\alpha=1$ y $u_1' u_2' = 0$

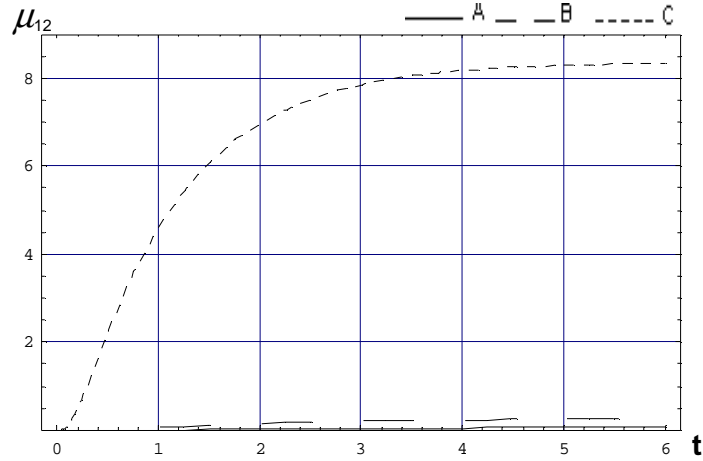


Figura 3. Comportamiento de la componente del tensor de dispersión μ_{11} .
A. $\alpha=0$, B. $\alpha=1$ y C. $\alpha=10$. $u_1' u_2' = 0.5$ y $\beta=1$

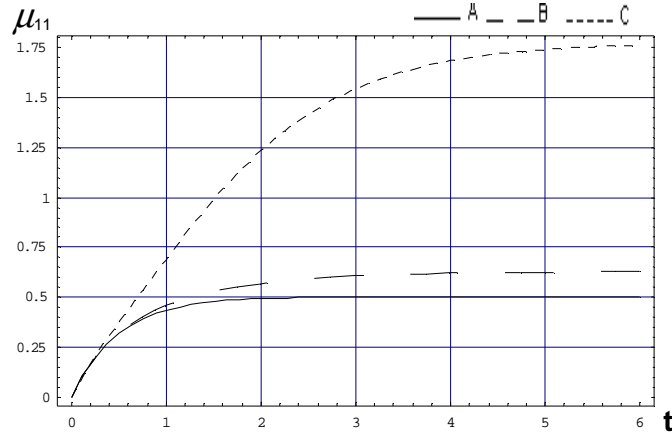


Figura 4. Comportamiento de la componente del tensor de dispersión μ_{12} .
A. $\alpha=0$, B. $\alpha=1$, C. $\alpha=10$. $u_1' u_2' = 0.5$ y $\beta=1$

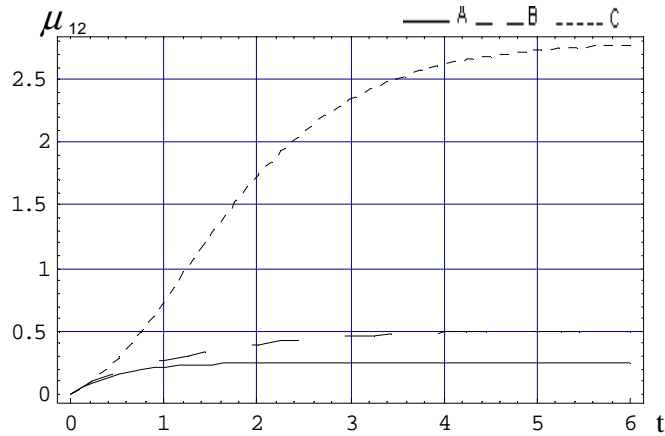


Figura 5. Comportamiento de la componente del tensor de dispersión μ_{11} .
A. $u_1' u_2' = 0$, B. $u_1' u_2' = 0.5$ y C. $u_1' u_2' = 0.9$. $\alpha = 1$ y $\beta = 1$

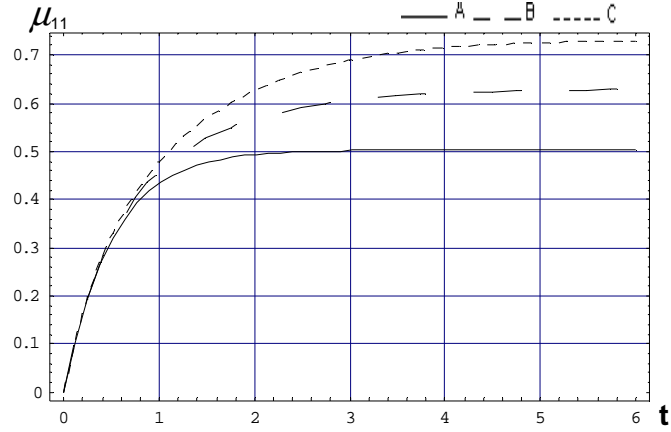


Figura 6. Comportamiento de la componente del tensor de dispersión μ_{12} .
A. $u_1' u_2' = 0$, B. $u_1' u_2' = 0.5$ y C. $u_1' u_2' = 0.9$. $\alpha = 1$ y $\beta = 1$

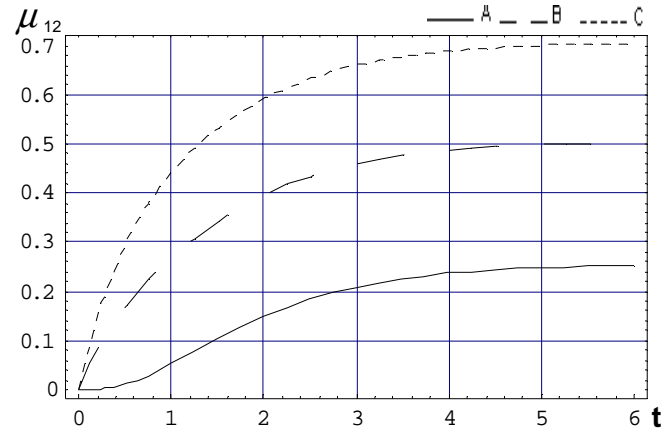


Figura 7. Comportamiento de la componente del tensor de dispersión μ_{21} .
A. $u_1' u_2' = 0$, B. $u_1' u_2' = 0.5$ y C. $u_1' u_2' = 0.9$. $\beta = 1$

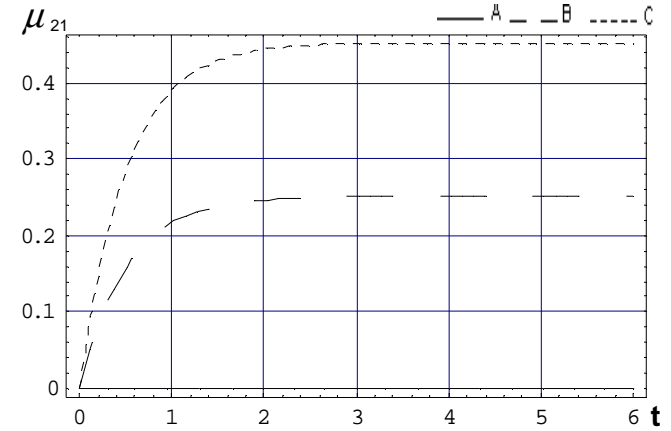
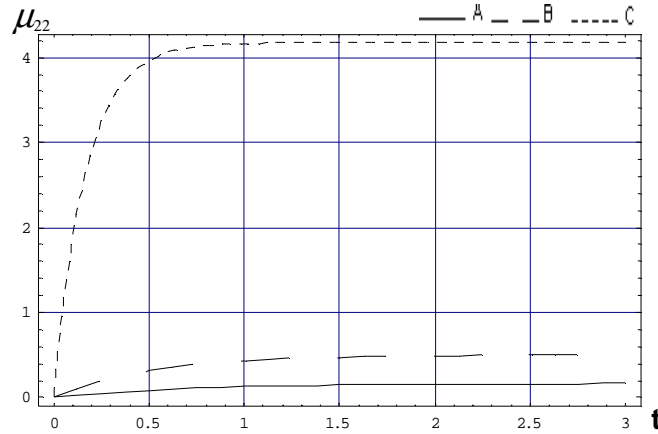


Figura 8. Comportamiento de la componente del tensor de dispersión μ_{22} .
A. $\beta=0.5$, B. $\beta=1$, C. $\beta=5$



En lo siguiente se describe el comportamiento de las funciones λ_{11} , λ_{12} , λ_{21} y λ_{22} en función de los diferentes parámetros (α , β , $u_1' u_2'$) en el mismo formato que las componentes del tensor μ . La variación del parámetro β altera los valores de λ_{11} y λ_{12} del modo mostrado en las Figuras 9 y 10 en donde no hay presencia ni de esfuerzo cortante. A medida que disminuye el valor de β el valor de equilibrio de λ_{11} y λ_{12} aumenta así como el tiempo necesario para alcanzarlo. En las Figuras 11 y 12, ambas con $u_1' u_2' = 0.5$ y $\beta = 1$, se observan los efectos de la variación del esfuerzo cortante α (0, 1 y 10) y el cambio de la tendencia temporal de λ_{11} y λ_{12} . A medida que aumenta el esfuerzo cortante, los valores y el tiempo necesario para el equilibrio de λ_{11} y λ_{12} se incrementan. Los valores de λ_{11} son mayores que los λ_{12} , como muestran las curvas **A**, **B** y **C** en las Figuras 11 y 12. Las Figuras 13 y 14 permiten observar la evolución temporal de λ_{11} y λ_{12} al variar los esfuerzos de Reynolds, fijando el esfuerzo cortante igual a uno y $\beta = 1$. A medida que se incrementa $u_1' u_2' = 0.1, 0.5, 0.9$, curvas **A**, **B** y **C**, los valores de λ_{11} y λ_{12} tienden a aumentar. En la Figura 13 los valores de λ_{11} son mayores que los de λ_{12} (Figura 14). En la Figura 15 se observa el comportamiento de λ_{21} , la cual, al igual que μ_{21} , no depende del esfuerzo cortante. En esta figura se presentan las variaciones debidas al cambio de $u_1' u_2'$. A medida que $u_1' u_2'$ aumenta, el valor estacionario de λ_{21} se incrementa. Puede verse que los valores de **A**, **B** y **C** de la componente λ_{21} de la Figura 15 son menores que los de λ_{12} de la Figura 14. En la Figura 16 se muestra la componente λ_{22} , la cual no depende de α y $u_1' u_2'$; se presenta el comportamiento de λ_{22} variando β en (0.5, 1 y 10). Cuando éste aumenta, los valores estacionarios de λ_{22} se incrementan, al igual que para μ_{22} .

Como ya se ha hecho notar, las respuestas de las componentes de los tensores μ y λ tienen formas similares, pero sus valores estacionarios son diferentes.

Figura 9. Comportamiento de la componente del tensor de dispersión λ_{11} .
A. $\beta=0.5$, B. $\beta=1$, C. $\beta=10$. $\alpha=0$ y $u_1' u_2'=0$

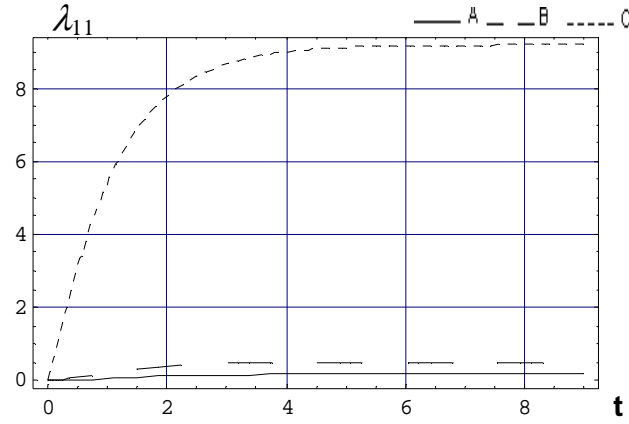


Figura 10. Comportamiento de la componente del tensor de dispersión λ_{12} .
A. $\beta=0.5$, B. $\beta=1$, C. $\beta=10$. $\alpha=0$ y $u_1' u_2'=0.5$

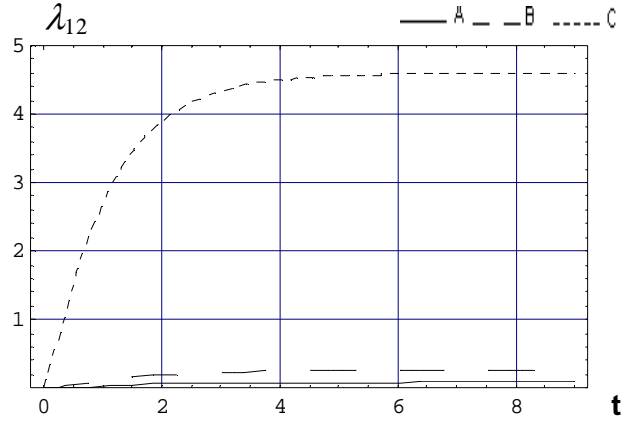


Figura 11. Comportamiento de la componente del tensor de dispersión λ_{11} .
A. $\alpha=0$, B. $\alpha=1$, C. $\alpha=10$. $u_1' u_2'=0.5$ y $\beta=1$

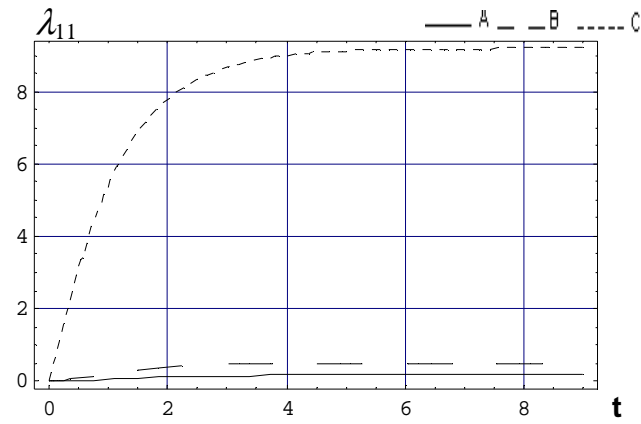


Figura 12. Comportamiento de la componente del tensor de dispersión λ_{12} .
A. $\alpha=0$, B. $\alpha=1$, C. $\alpha=10$. $u_1'u_2'=0.5$ y $\beta=1$

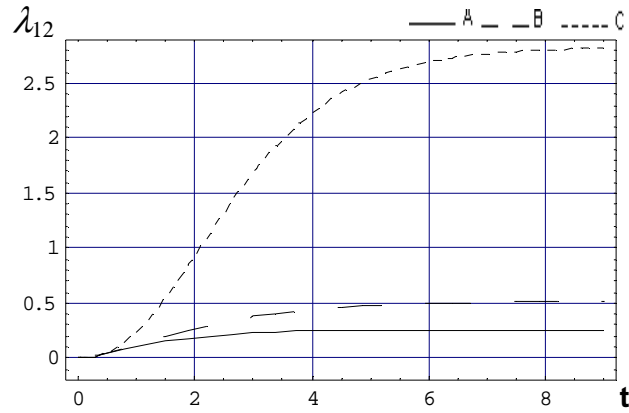


Figura 13. Comportamiento de la componente del tensor de dispersión λ_{11} .
A. $u_1'u_2'=0$, B. $u_1'u_2'=0.5$, C. $u_1'u_2'=0.9$. $\alpha=1$ y $\beta=1$

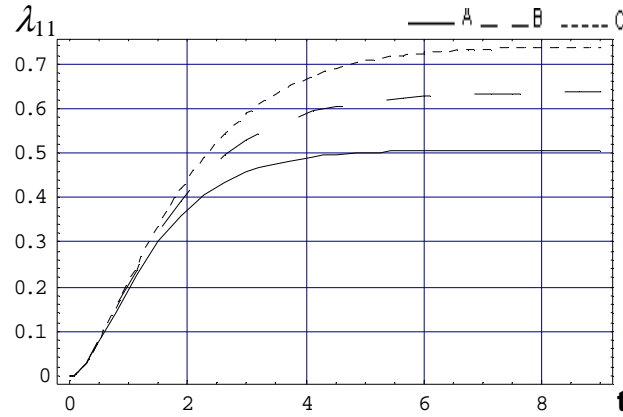


Figura 14. Comportamiento de la componente del tensor de dispersión λ_{12} .
A. $u_1'u_2'=0$, B. $u_1'u_2'=0.5$, C. $u_1'u_2'=0.9$. $\alpha=1$ y $\beta=1$

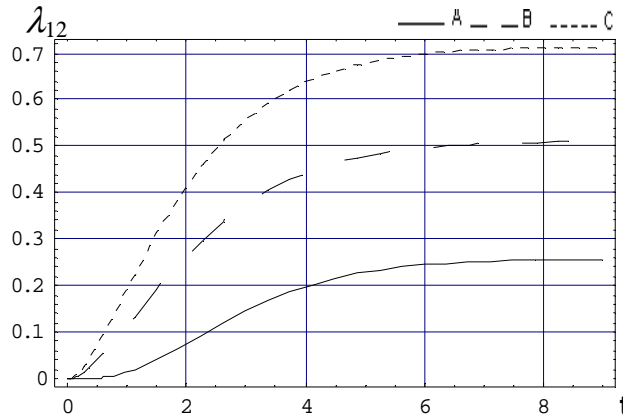


Figura 15. Comportamiento de la componente del tensor de dispersión λ_{21} .
A. $u_1' u_2' = 0$, B. $u_1' u_2' = 0.5$, C. $u_1' u_2' = 0.9$. $\beta = 1$

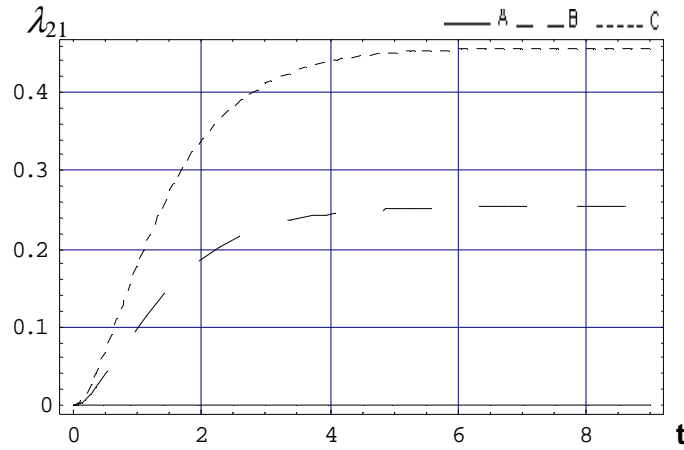
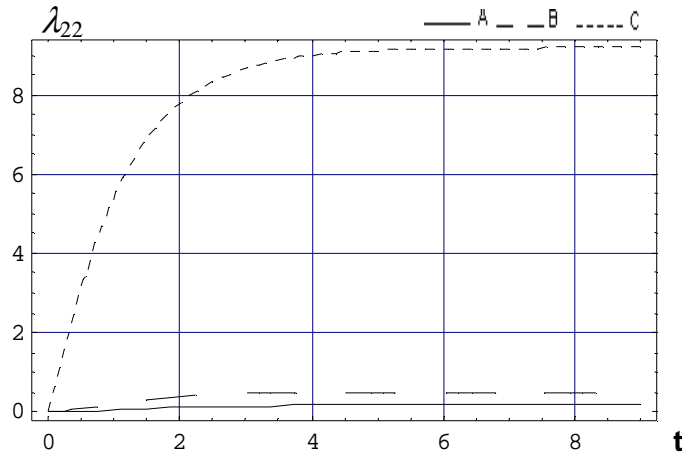


Figura 16. Comportamiento de la componente del tensor de dispersión λ_{22} .
A. $\beta = 0.5$, B. $\beta = 1$, C. $\beta = 10$



En los Anexos B, C y D se puede observar el comportamiento de las variables σ_{11} , σ_{12} , σ_{13} , σ_{14} , σ_{21} , σ_{22} , σ_{23} , σ_{24} , σ_{33} , σ_{34} , y σ_{44} , al variar los parámetros como lo son β , α y $u_1' u_2'$, se observa que las variables presentan diferentes respuestas al cambio de sus parámetros. Todos los resultados de las variables σ_{11} , σ_{12} , σ_{13} , σ_{14} , σ_{21} , σ_{22} , σ_{23} , σ_{24} , σ_{33} , σ_{34} y σ_{44} fueron obtenidos de la ecuación 13.

3.2 DENSIDAD DE PROBABILIDAD W

El comportamiento para la pdf w solución de (14) en dos dimensiones se analiza en las Figuras 17 hasta la 20 en forma de relieves en tres dimensiones. En las Figuras 17, 18, 19 y 20 las dos variables horizontales son las componentes de la posición x e y y la componente vertical representa el valor

de la función de densidad de probabilidad. Se ilustra el caso de la pdf para velocidad nula de las partículas, i.e., $(v_1, v_2) = (0, 0)$.

En las Figuras 17(superior) y 17(inferior) se puede observar la variación de la pdf con β , para un flujo isótropo e igual tiempo. En este caso las partículas pequeñas, Figura 17(superior), se expanden mucho más que las partículas grandes, Figura 17(inferior). Esto se presenta debido a que la inercia de las partículas grandes es mucho mayor que la de las pequeñas, las cuales pueden moverse fácilmente. Se puede notar que la pdf es simétrica en x e y mostrando un relieve de círculos concéntricos. En flujo turbulento no isótropo sin presencia de esfuerzo cortante, la variación del esfuerzo de Reynolds influye en el movimiento de las partículas, lo cual se muestra en la Figura 18, donde las dos gráficas, superior e inferior, no son igual de anchas. Este efecto se debe a que en la Figura 18(superior) $u_1' u_2' = 0.1$ y en Figura 18(inferior) $u_1' u_2' = 0.5$ generando un relieve rotado en forma de elipses y valores diferentes de velocidad en las componentes x e y . Cuando se aumenta el valor del esfuerzo de Reynolds el relieve se expande.

La variación de la pdf con el esfuerzo cortante medio en flujo turbulento isótropo y con partículas de tamaño intermedio se presenta en la Figura 19. A medida que α aumenta, la pdf se va estrechando más en un relieve rotado de elipses, variando también la velocidad de las partículas en las componentes x e y . En la Figura 20 puede observarse que al asignar un valor negativo al esfuerzo de Reynolds, la gráfica se rota en sentido contrario al observado en la Figura 18(superior). En estas dos figuras también puede observarse que en un flujo no isótropo la presencia de esfuerzo cortante estrecha más la concentración de las partículas que el esfuerzo de Reynolds. Al aumentar el tiempo la pdf w se expande lo cual se puede observar en el Figura 20(superior) donde se ilustra un tiempo mas largo que en la Figura 20(inferior).

Figura 17. Densidad de probabilidad w para flujo isótropo, $\alpha=0$ y $t=1$. Parte superior $\beta=50$ y parte inferior $\beta=\tilde{0}.5$

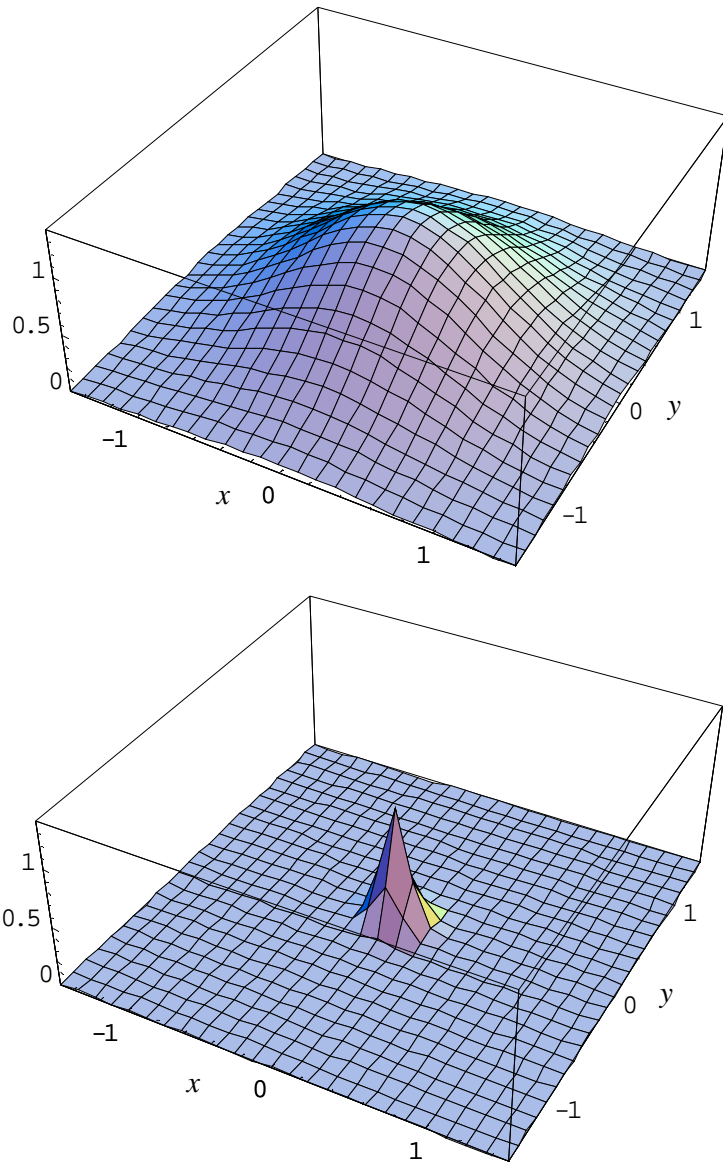


Figura 18. Densidad de probabilidad w . $t=1$ $\alpha=0$ y tamaño intermedio. Parte superior $u_1' u_2' = 0.1$ y parte inferior $u_1' u_2' = 0.5$.

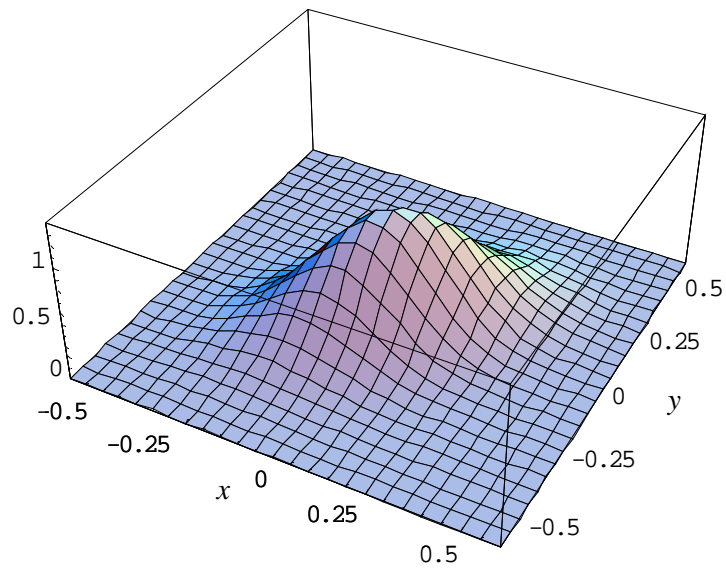
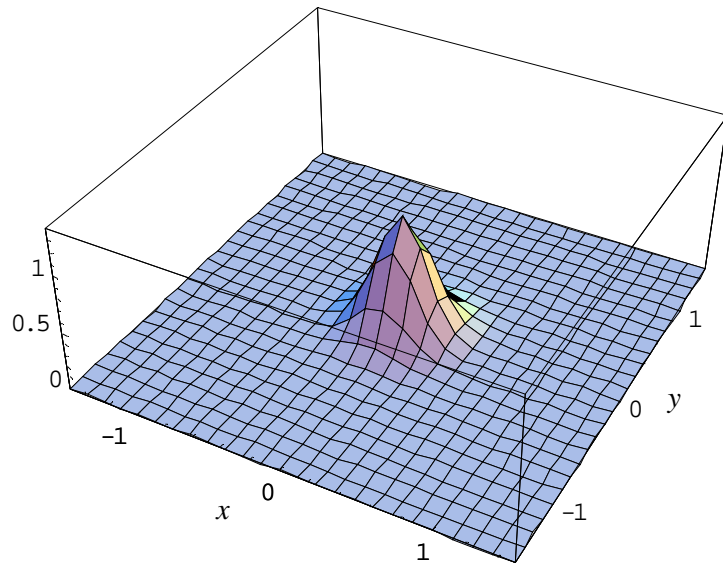


Figura 19. Densidad de probabilidad w . $t=5$ $u_1' u_2' = 0$ y $\beta=1$. Parte superior $\alpha=1$ y parte inferior $\alpha=10$.

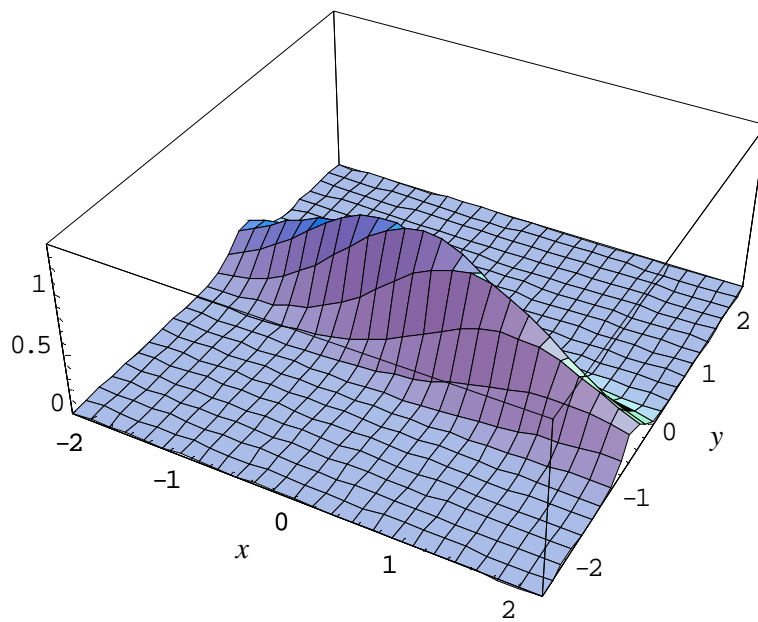
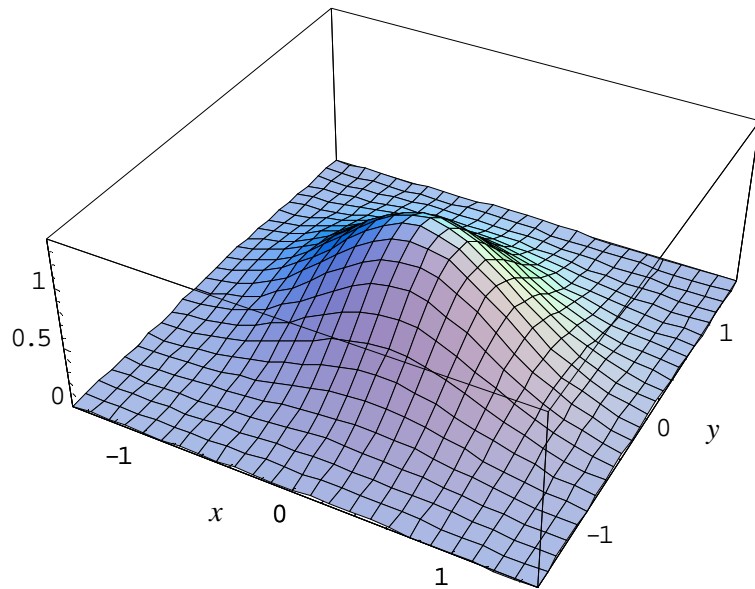
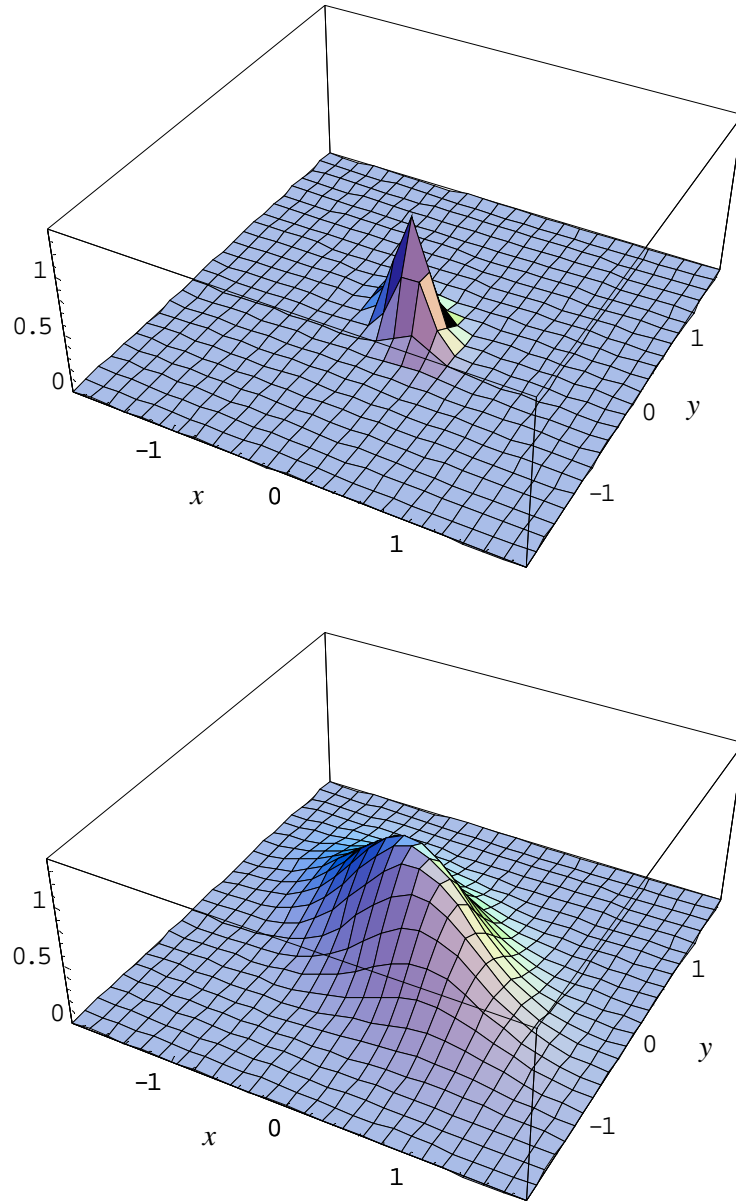


Figura 20. Densidad de probabilidad w . $u_1' u_2' = -0.5$. $\beta=1$ y $\alpha=1$. Parte superior $t=1$ y parte inferior $t=5$



La forma de la pdf en función de las componentes de la velocidad de la partícula (v_1 , v_2) en el origen es similar a la mostrada en las figuras anteriores. Sin embargo, cuando se considera un punto genérico (x, y) distinto del origen, el pico de w , donde la velocidad media de las partículas es máxima, es distinta de cero. Esto se puede ver en las Figuras 21 y 24. En la Figura 21, para partículas pequeñas en un flujo turbulento isótropo con $\alpha = 0$ y para $t=5$, se muestra la pdf en $x=-0.5, y=0$. Se observa que el pico de w se sitúa en cero en y pero en x tiene un valor no nulo. En la Figura 22, la pdf se muestra en las mismas condiciones que en la Figura 21, pero en $x=0$ e $y=0.5$. El máximo de w indica que el valor de la componente media de la velocidad de la partícula en

x es cero pero la componente y presenta un valor no nulo. En la Figura 23 para partículas de tamaño intermedio y en un flujo no isótropo con presencia de esfuerzo cortante se puede ver la pdf en $x=0.5$ y $y=0.5$. Se puede observar en un $t=1$, que el pico de la w tienen valores tanto en x como en y , y la variación de esfuerzo cortante permite cambiar la forma del relieve de la pdf haciéndola al lado derecho. En la figura 24, para las mismas condiciones que la figura anterior pero en un flujo isótropo, se puede observar el efecto del esfuerzo de Reynolds haciendo rotar de la pdf en el campo de velocidades.

Figura 21. Densidad de probabilidad w . Para $u_1' u_2' = 0$, $\beta=50$, $\alpha=0$, $t=5$, $x=-0.5$ y $y=0$

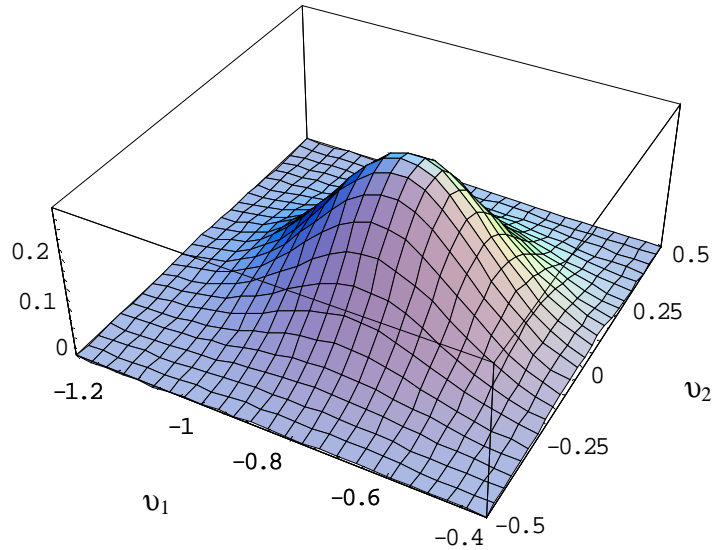


Figura 22. Densidad de probabilidad w . Para $u_1' u_2' = 0$, $\beta=50$, $\alpha=0$, $t=5$, $x=0$ y $y=0.5$

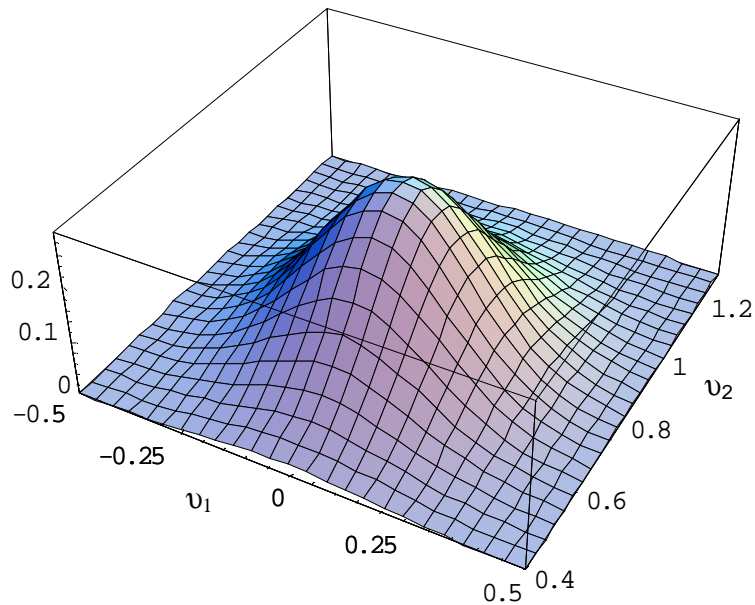


Figura 23. Densidad de probabilidad w . Para $u_1' u_2' = 0$, $\beta=1$, $\alpha=2$, $t=1$, $x=0.5$ y $y=0.5$

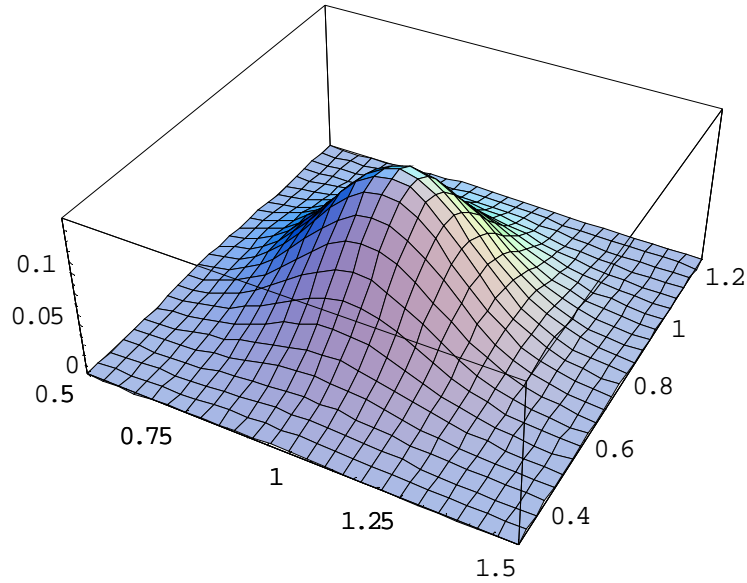
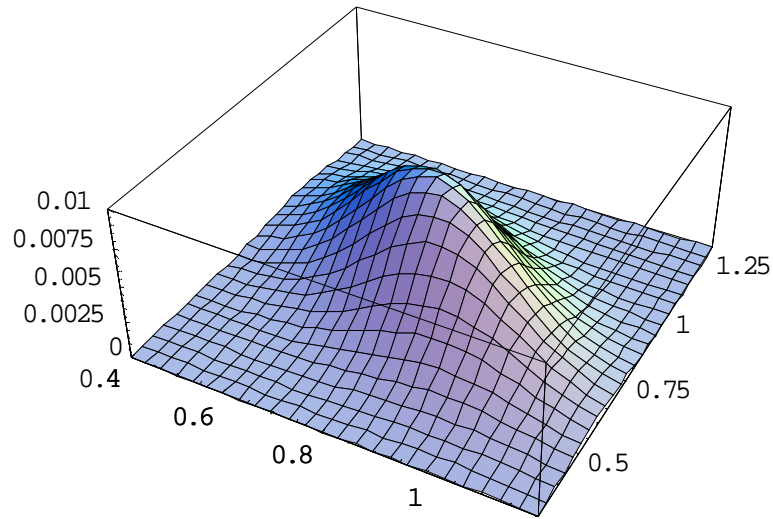


Figura 24. Densidad de probabilidad w . Para $u_1' u_2' = 0.5$, $\beta=1$, $\alpha=2$, $t=1$, $x=0.5$ y $y=0.5$



3.3 CONCENTRACION DE PERFILES DE LAS PARTICULAS

Una vez analizado el comportamiento de los tensores de dispersión μ y λ , y la pdf w se procede a analizar los cambios en las variables propias de la fase de partículas. A continuación se detallan las estadísticas de primer y segundo

orden, dadas por las fórmulas presentadas en el epígrafe V en función de los parámetros de dependencia para la pdf $w(x, y, u, v, t, \alpha, \beta, \tau, u'_1 u'_1, u'_1 u'_2, u'_2 u'_2)$.

La Figuras 25 y 26 muestran los perfiles de concentración másica de partículas para diferentes condiciones. Si el esfuerzo turbulento cortante es cero y $u'_i u'_j = \delta_{ij}$, i.e., el flujo turbulento es isotrópico, las partículas se difunden igualmente en todas las direcciones desde el punto de inserción, en este caso el (0, 0). Esta situación se puede ver exactamente en la Figura 25(superior), la cual se compara con el resultado de Hyland et al. (1999) Figura 25(inferior). Los perfiles de concentración son círculos concéntricos centrados en el origen. La concentración de partículas es mayor en el centro y decrece a medida que se van alejando del punto inserción.

Los perfiles de concentración en el caso de flujo turbulento no isotrópico, e.g. $u'_1 u'_2 = -0.5$, se muestran en la Figura 26(superior), los cuales se pueden comparar con los resultados obtenidos por Hyland et al. (1999) Figura 26(inferior). En este caso, los perfiles de concentración son elipses rotadas, mostrando que las partículas no se difunden igualmente en todas las direcciones. Comparando los resultados obtenidos Figuras 25(superior) y 26(superior) con los resultados de numéricos obtenidos por Hyland et al. (1999) Figuras 25(inferior) y 26(inferior), se pueden ver que son muy similares. Cabe notar que los resultados obtenidos en este trabajo fueron debidamente normalizados puesto que Hyland no proporciona el valor de la escala temporal turbulenta utilizada para el flujo.

Al tener implementada la expresión simbólica para la función w , analizar su comportamiento al modificar cualquier parámetro es fácil. Por ejemplo, en el caso de turbulencia isotrópica con presencia de esfuerzo cortante medio los perfiles de concentración de partículas se modifican respecto de las situaciones anteriores, como puede verse en las Figuras (27, 28, 29 y 30). Comparando con la Figura 25(superior), el efecto del esfuerzo cortante es modificar los perfiles de concentración de círculos concéntricos a elipses rotadas. En las Figuras (27, 28, 29 y 30) conforme el tiempo aumenta, las elipses de concentración se expanden, se estiran y rotan debido a la acción del esfuerzo cortante. Dicha evolución temporal puede verse en las Figuras 27 y 28 (lado izquierdo) en donde las dos respuestas tienen valores de esfuerzo cortante α y β iguales a uno. Los resultados del lado derecho son los presentados en Hyland et al. (1999). En la Figura 29 se observa que el estiramiento y la rotación se incrementan al aumentar el esfuerzo cortante. La Figura 30, donde las partículas consideradas son grandes, es similar a la Figura 27, pero la dispersión de las partículas es notablemente menor debido a su inercia. Estos resultados y los obtenidos por Hyland son muy similares.

Figura 25. Influencia del esfuerzo de Reynolds en un flujo isótropo. Parte superior resultado del trabajo y parte inferior resultado de Hyland

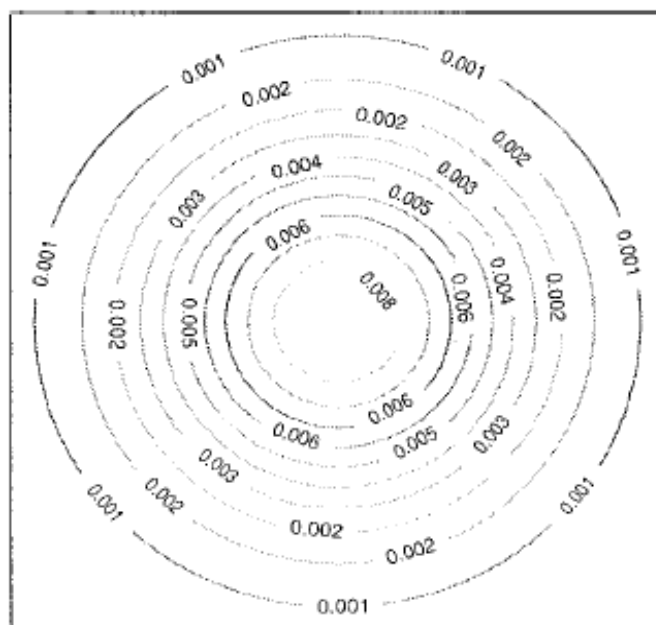
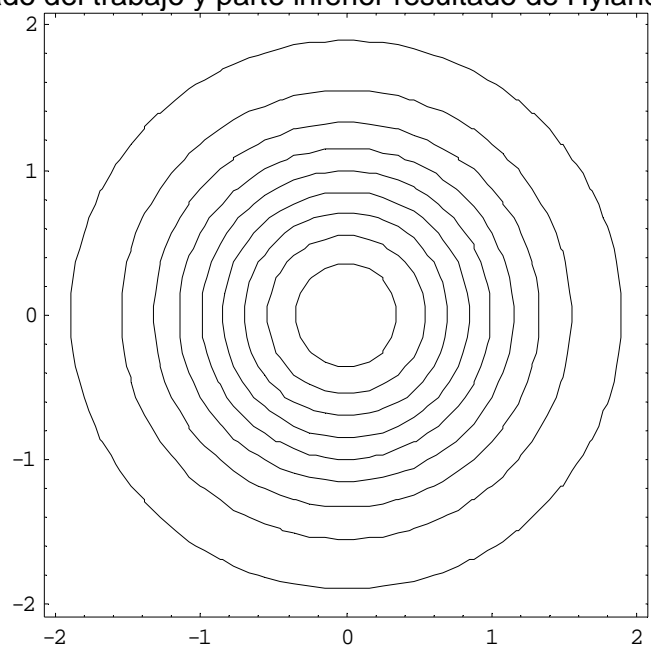
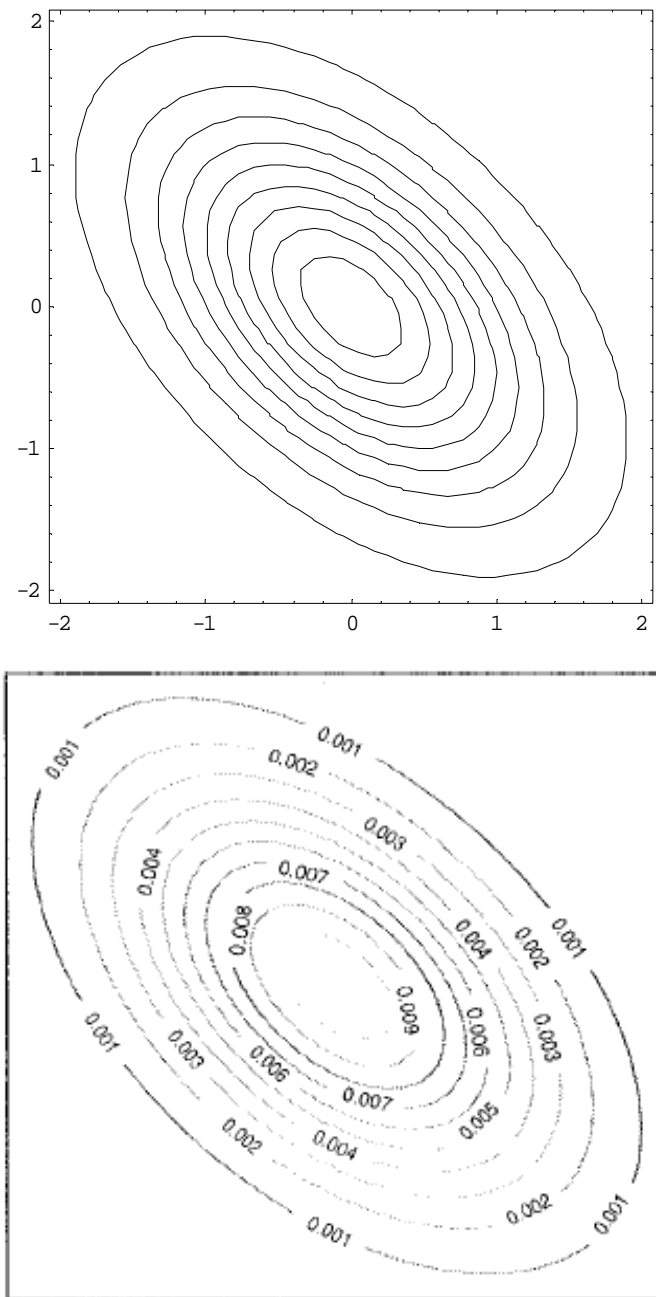


Figura 26. Influencia del esfuerzo de Reynolds en un flujo no isótropo, $u_1' u_2' = -0.5$. Parte superior resultado del trabajo y parte inferior resultado de Hyland



Los perfiles de concentración de partículas en un flujo turbulento no isótropo, con $\alpha=0$ se pueden ver en las Figura (31 hasta 37). Los perfiles de concentración se expanden a medida que va aumentando el esfuerzo de Reynolds, como se muestra en las Figuras 31, 32 y 33. Debido al esfuerzo de Reynolds no nulo, en la Figura 31 las partículas no se difunden igual en todas las direcciones y los perfiles de concentración ya no son completamente

círculos concéntricos; en las Figura 32 y 33 el efecto del esfuerzo de Reynolds es más claro, y los perfiles muestran estrechamiento y un grado de inclinación, alrededor de 45° . El efecto de considerar un esfuerzo de Reynolds negativo ($u_1' u_2' = -0.5$) y un esfuerzo cortante medio positivo ($\alpha = 1$) se puede apreciar en las Figuras 34, 35, 36 y 37. Para tiempos cortos (representados en la Figura 34 por $t = 1$), donde las partículas no se han alejado mucho del origen, el efecto predominante es el del esfuerzo de Reynolds, y la acción del esfuerzo cortante medio es marginal. Conforme el tiempo aumenta ambas tendencias de rotación (el esfuerzo de Reynolds negativo hacia la izquierda y el esfuerzo cortante medio hacia la derecha) compiten entre sí ($t = 2$ en la Figura 35) girando paulatinamente los perfiles de concentración en sentido horario hasta que para tiempos largos (en la figura 36), donde las partículas han tenido tiempo suficiente para alejarse del origen, el efecto que prevalece es del esfuerzo cortante medio y las elipses de concentración se encuentran giradas hacia la derecha. En la Figura 37 se observa un claro dominio del esfuerzo cortante medio, presente con un tiempo muy largo en donde se puede ver que las partículas se han alejado lo suficiente del origen.

El tiempo que tardan las partículas en alcanzar a difundirse en el fluido depende del tamaño de éstas: cuando son muy pequeñas se difunden más rápidamente que cuando son más grandes e inerciales.

Figura 27. Concentración de perfiles de partícula, $u_i' u_j' = \delta_{ij}$. $\alpha=1$, $\beta=10$ y $t=5$. Lado izquierdo resultado obtenido y lado derecho resultado de Hyland

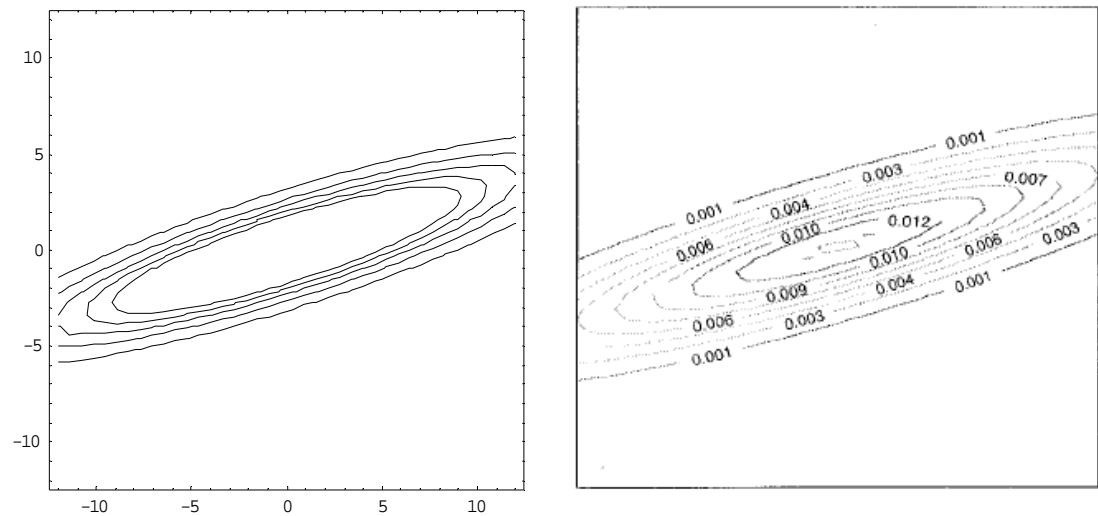


Figura 28. Concentración de perfiles de partícula, $u_i' u_j' = \delta_{ij}$. $\alpha=1$, $\beta=10$ y $t=10$. Lado izquierdo resultado obtenido y lado derecho resultado de Hyland

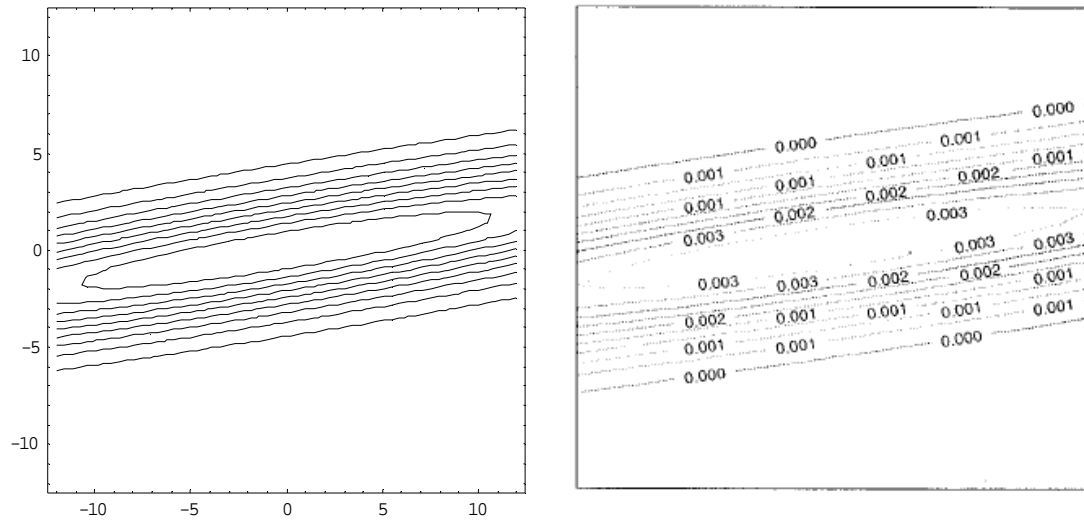


Figura 29. Concentración de perfiles de partícula, $u_i' u_j' = \delta_{ij}$. $\alpha=5$, $\beta=10$ y $t=5$. Lado izquierdo resultado obtenido y lado derecho resultado de Hyland

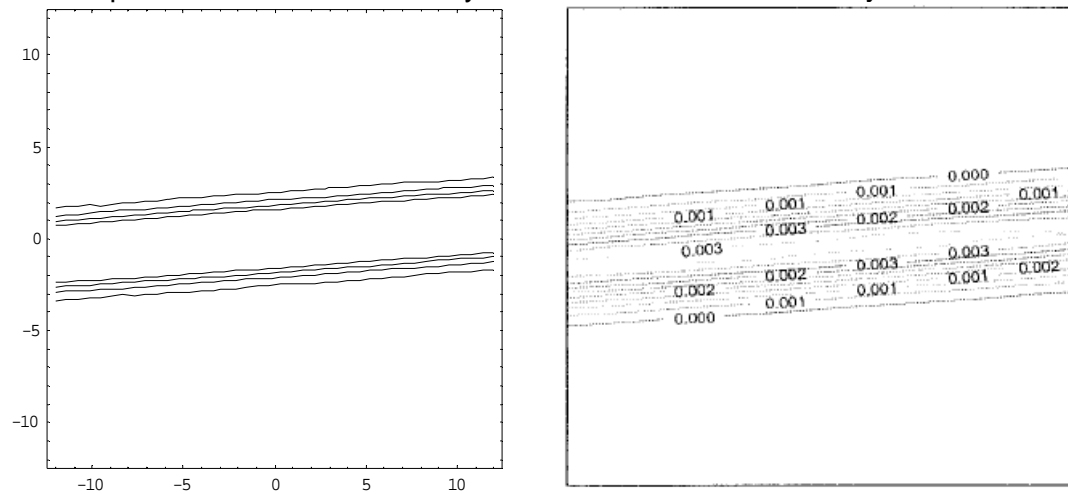


Figura 30. Concentración de perfiles de partícula, $u_i' u_j' = \delta_{ij}$. $\alpha=1$, $\beta=0.5$ y $t=5$. Lado izquierdo resultado obtenido y lado derecho resultado de Hyland

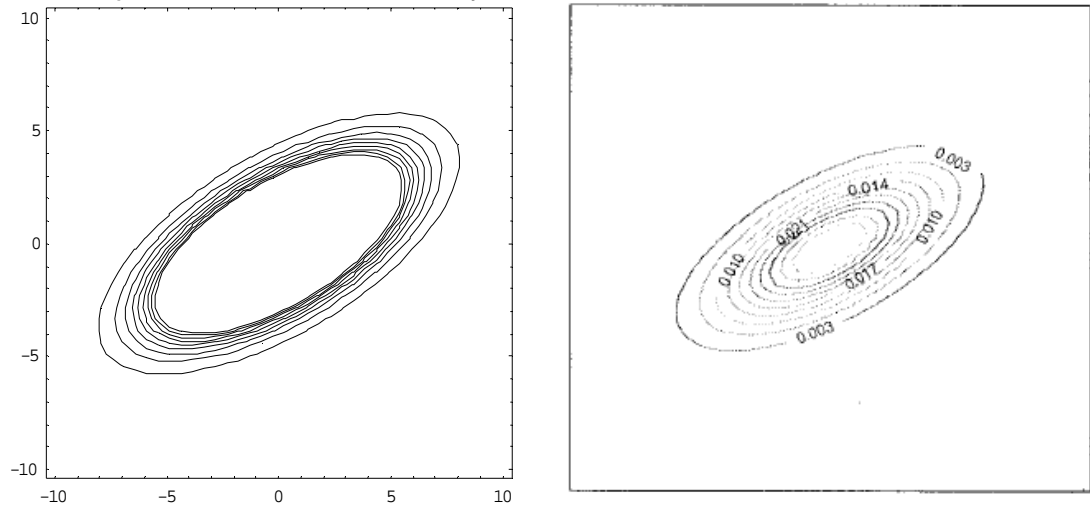


Figura 31. Influencia del esfuerzo de Reynolds en un flujo turbulento no isótropo, para un $t=1$, $u_1' u_2' = 0.1$, $\beta=1$ y $\alpha=0$

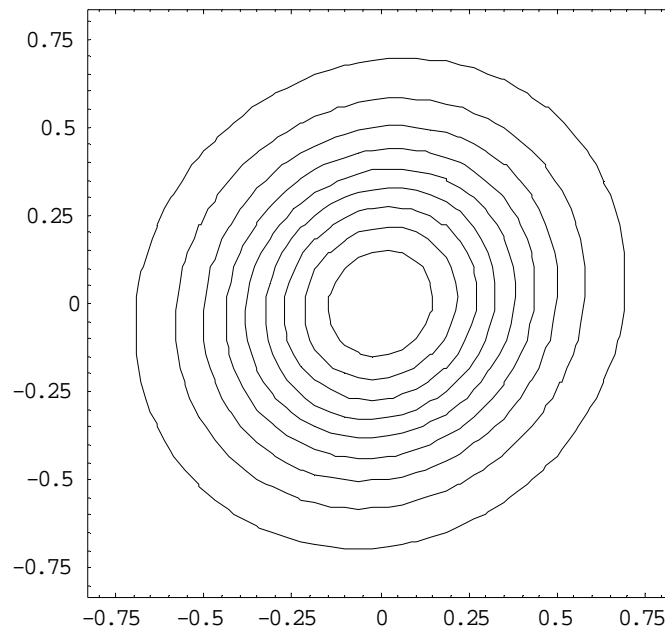


Figura 32. Influencia del esfuerzo de Reynolds en un flujo turbulento no isótropo, para un $t=1$, $u_1' u_2' = 0.5$, $\beta=1$, $t=1$ y $\alpha=0$

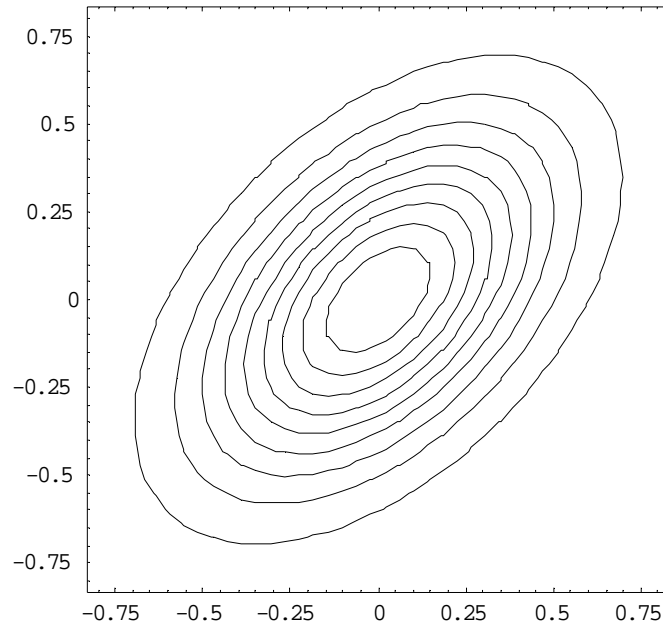


Figura 33. Influencia del esfuerzo de Reynolds en un flujo turbulento no isótropo, para un $t=1$, $u_1' u_2' = 0.9$, $\beta=1$, $t=1$ y $\alpha=0$

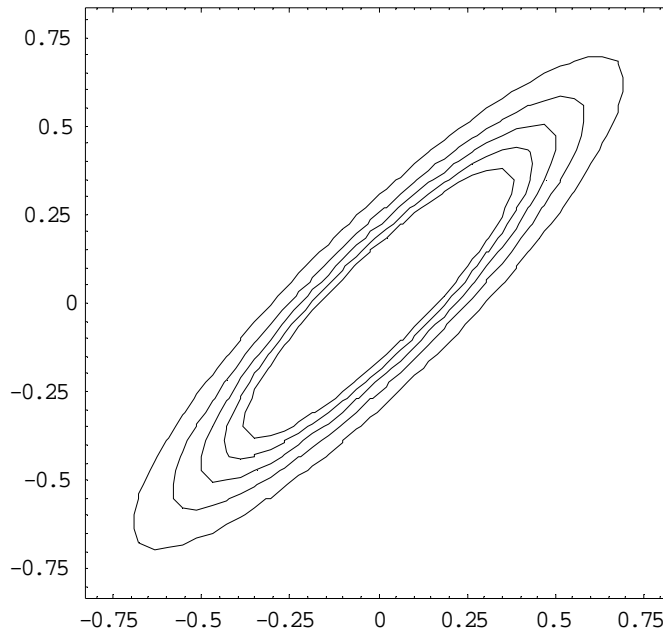


Figura 34. Influencia del esfuerzo de Reynolds en un flujo turbulento no isótopo, para un $t=1$, $u_1' u_2' = -0.5$, $\beta=1$, $t=1$ y $\alpha=1$

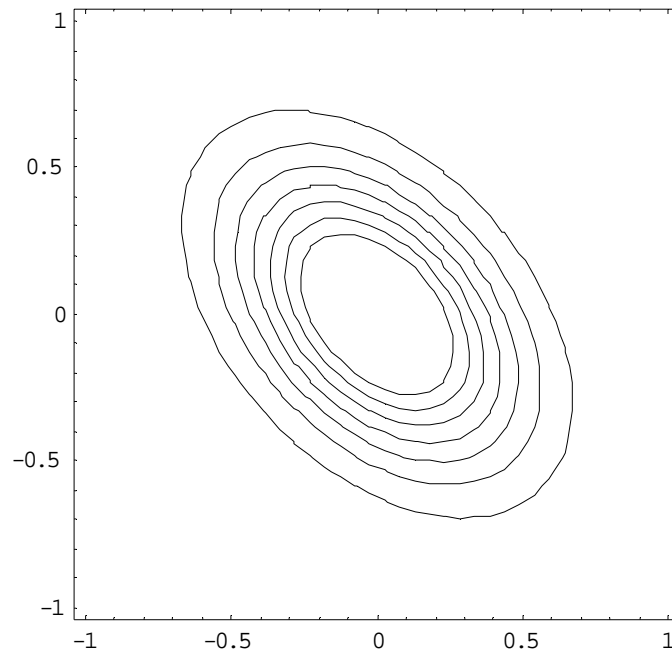


Figura 35. Influencia del esfuerzo de Reynolds en un flujo turbulento no isótopo, para un $u_1' u_2' = -0.5$, $\beta=1$, $t=2$ y $\alpha=1$

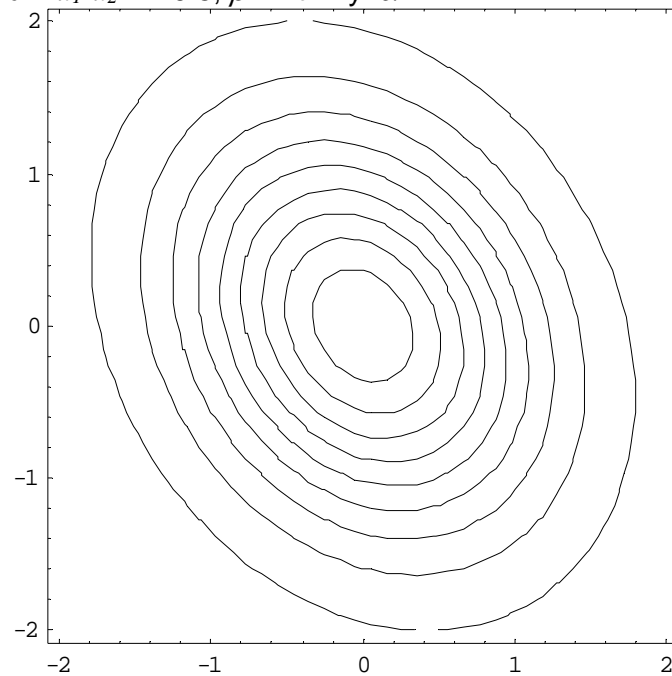


Figura 36. Influencia del esfuerzo cortante en un flujo turbulento no isótropo, para un $u_1' u_2' = -0.5$, $\beta=1$, $t=3$ y $\alpha=1$

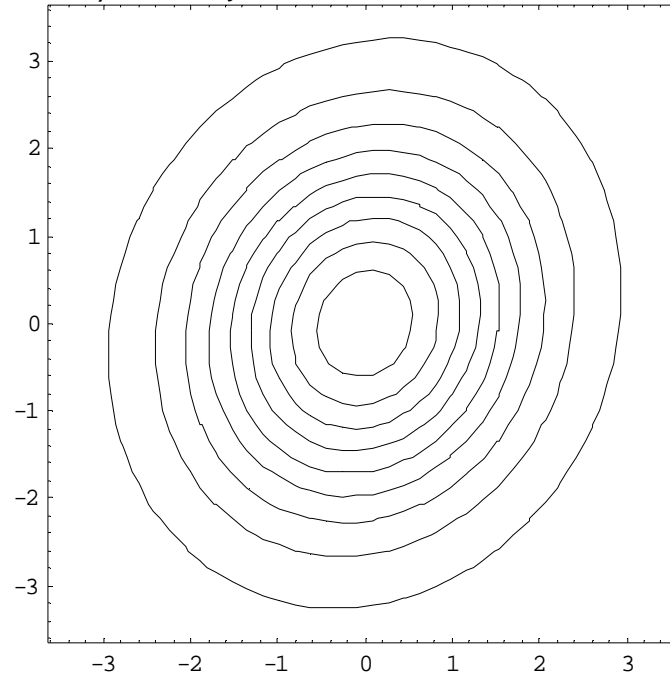
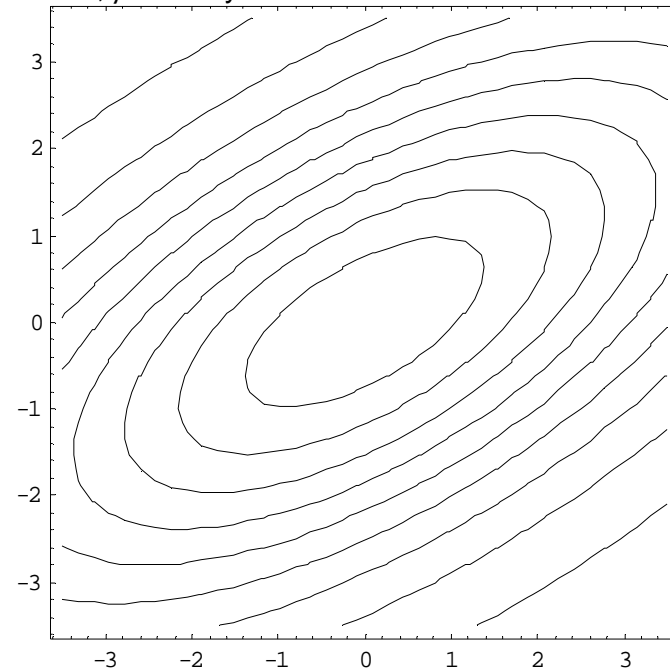


Figura 37. Influencia del esfuerzo cortante en un flujo turbulento no isótropo, para un $u_1' u_2' = -0.5$, $\beta=1$, $t=5$ y $\alpha=1$



3.4 VELOCIDAD MEDIA DE LAS PARTICULAS

La expansión, estiramiento y rotación de los perfiles de concentración, encuentra explicación en el comportamiento temporal de la velocidad media de las partículas, la cual puede verse en las Figuras 38, 39, 40 y 41. Las Figuras 38 y 39, son elaboradas con $\alpha=1$ y $u_1' u_2'=0.5$. En la Figura 38 las partículas, al comienzo, se alejan del punto de inserción debido a la turbulencia; en este punto la velocidad media del fluido es cero. Al alejarse del origen las partículas tendrán en general una velocidad diferente a la velocidad del fluido. Las partículas modifican su dirección por el efecto del vórtice ilustrado, el cual es causado por los perfiles de concentración rotados.

Para tiempos más largos, las partículas entran en equilibrio con el fluido, aproximándose la velocidad media de éstas a la del fluido. Esto se puede ver en la Figura 39, en donde no se presenta rotación, con los efectos de convección del fluido dominando los difusivos de la turbulencia. En las dos figuras anteriores puede verse claramente que al transcurrir un tiempo prolongado el vector velocidad media se presenta en la dirección x teniendo valor cero en la dirección y .

Comparado los resultados obtenidos en este trabajo, Figuras 38(superior) y 39(superior), con los mostrados en Hyland et al. (1999) en las Figuras 38(inferior) y 39(inferior), se puede observar que los vectores de velocidad media son prácticamente iguales. En las Figuras 40 y 41 se puede ver como es el inicio del efecto del vortice. En la Figura 40 para un tiempo muy corto, no hay efecto ni del esfuerzo cortante ni del esfuerzo de Reynolds, los vectores de velocidad no cambian de dirección. En la Figura 41 se empieza a ver el efecto del vórtice y la dirección de los vectores de velocidad de la partículas son diferentes, esto para un tiempo pequeño.

Figura 38. Vectores de velocidad media de la partícula para un $t=5$. Parte superior resultado obtenido y parte inferior resultado de Hyland

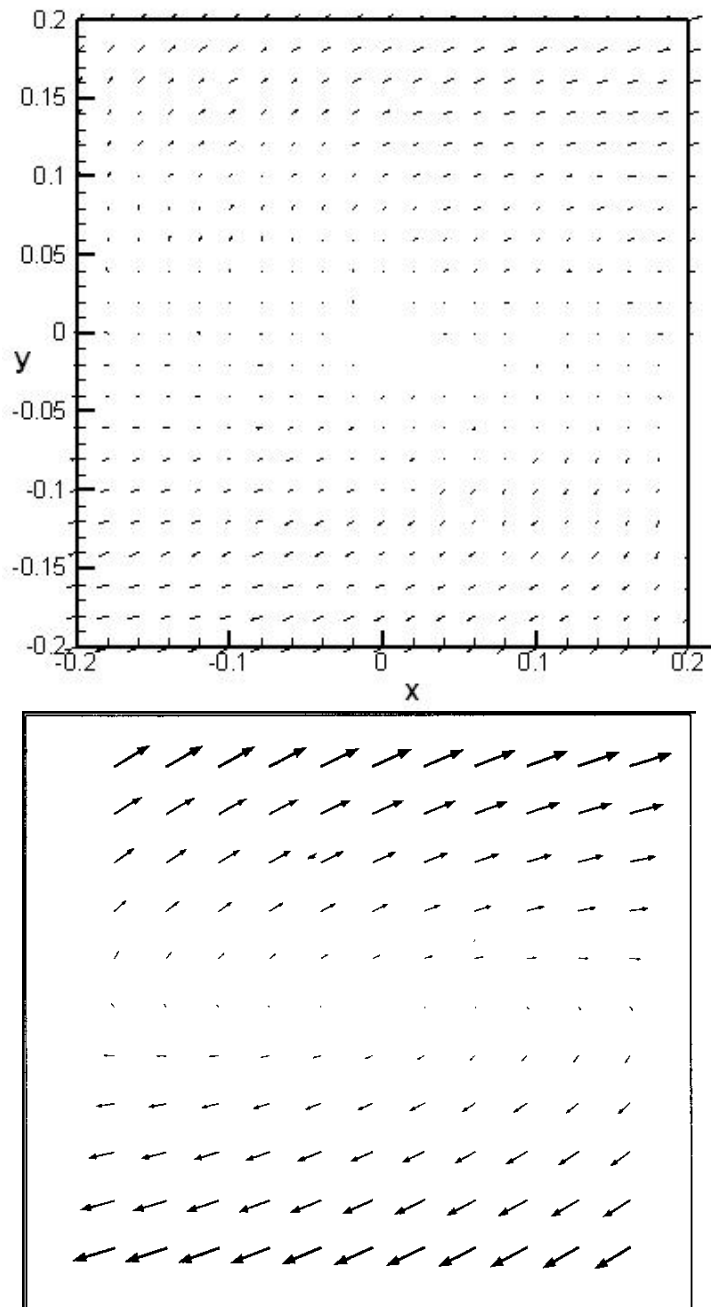


Figura 39. Vectores de velocidad media de la partícula. Para un $t=50$. Parte superior resultado obtenido y parte inferior resultado de Hyland

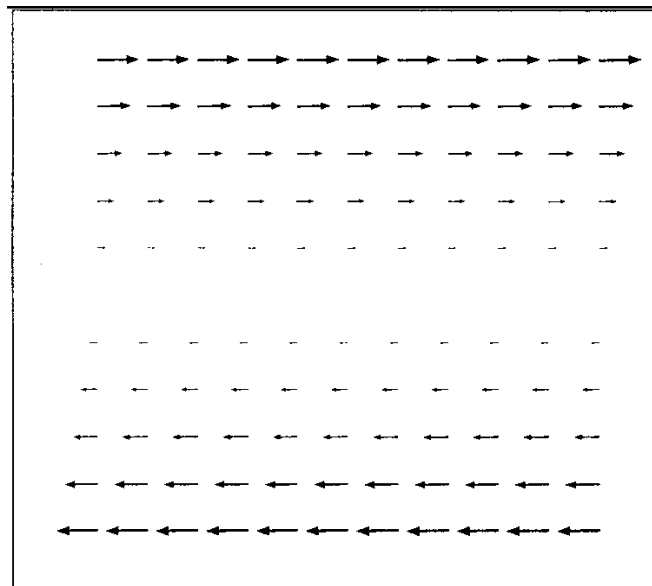
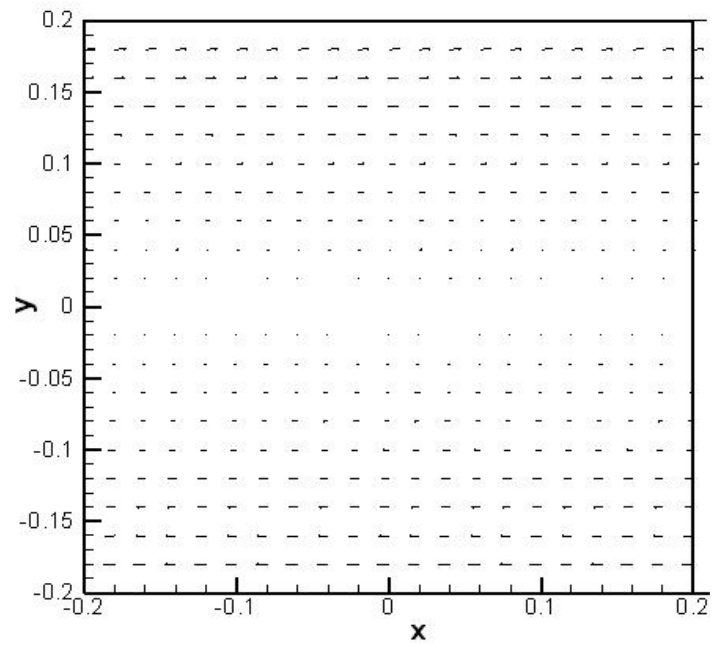


Figura 40. Vectores de velocidad media de la partícula, para un $t=0.5$

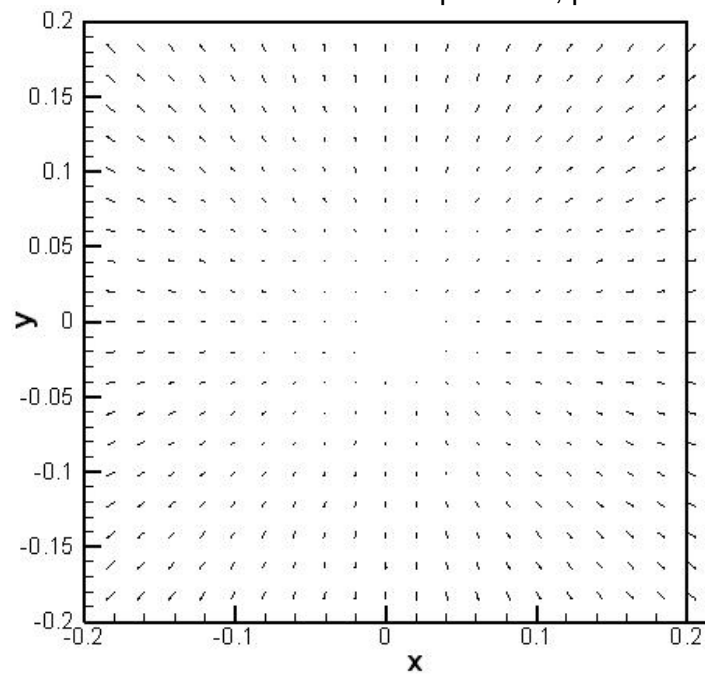
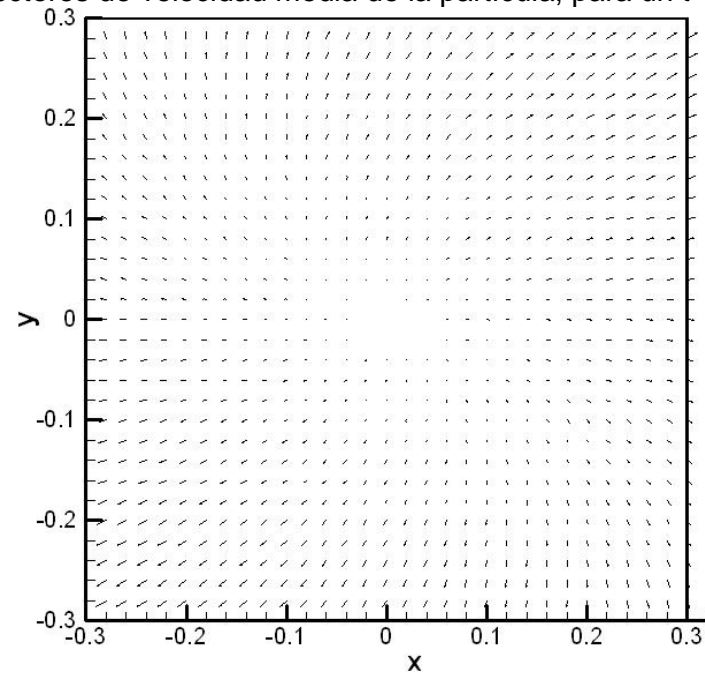


Figura 41. Vectores de velocidad media de la partícula, para un $t=1$



3.5 LINEAS DE CORRIENTE

Cuando no se presenta esfuerzo cortante en el flujo turbulento isótropo, las partículas no tienen ninguna dirección de preferencia, esto se puede ver en la Figura 42, donde las líneas de corriente son rayos que se alejan del origen, lo cual da lugar a la aparición de perfiles de concentración consistentes en círculos concéntricos. Cuando α es no nulo, la situación anterior cambia y los círculos se convierten en elipses rotadas. En la Figura 43 se muestran las líneas de corriente correspondientes.

Cuando el tiempo es muy prolongado las vectores de velocidad tienden a la dirección x , por lo dicho, las líneas de corriente de estos vectores se observan en la Figura 44. El comienzo de la variación de los vectores de velocidad de las partículas se puede ver en la Figura 45, en donde la velocidad en x y en y empieza a cambiar.

Figura 42. Línea de corriente para los vectores velocidad media. Perfiles de círculos concéntricos.

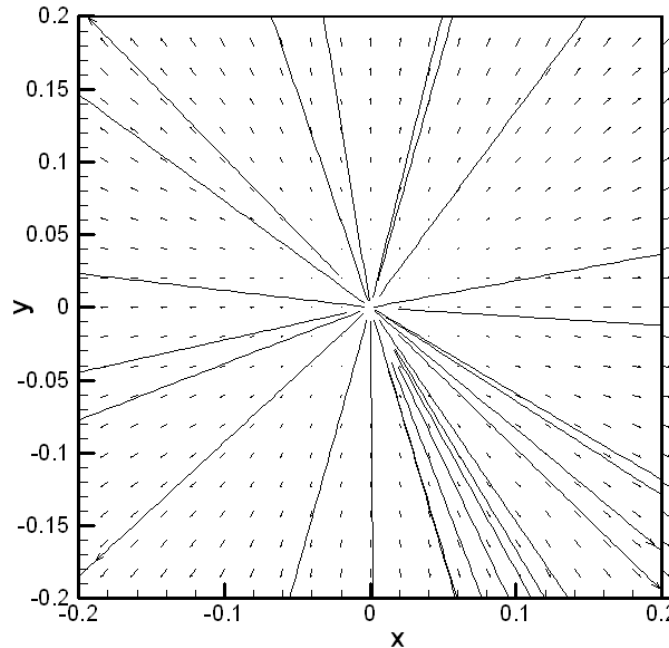


Figura 43. Línea de corriente para los vectores velocidad media. Perfiles de elipses rotadas.

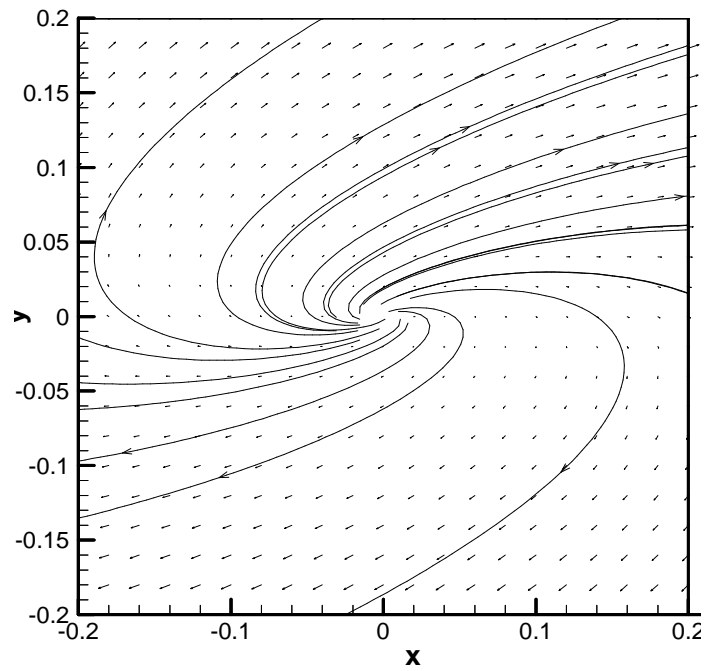


Figura 44. Línea de corriente para los vectores velocidad media, para un tiempo largo

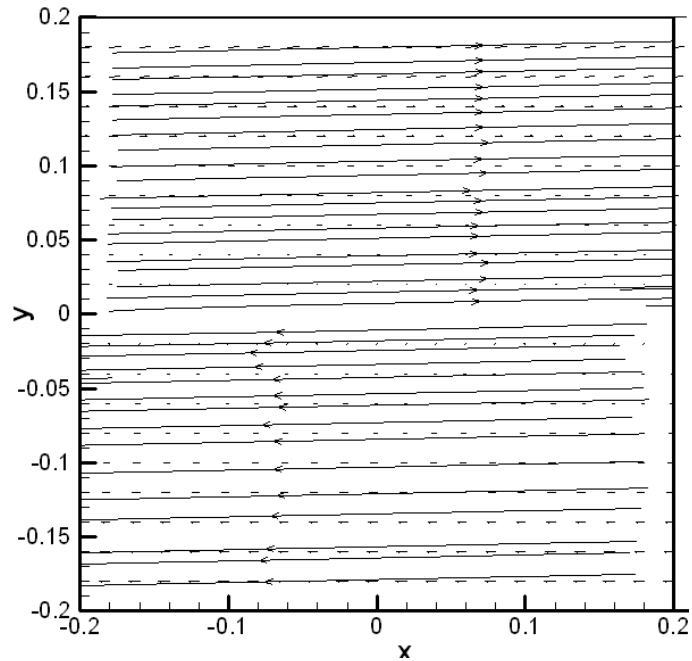
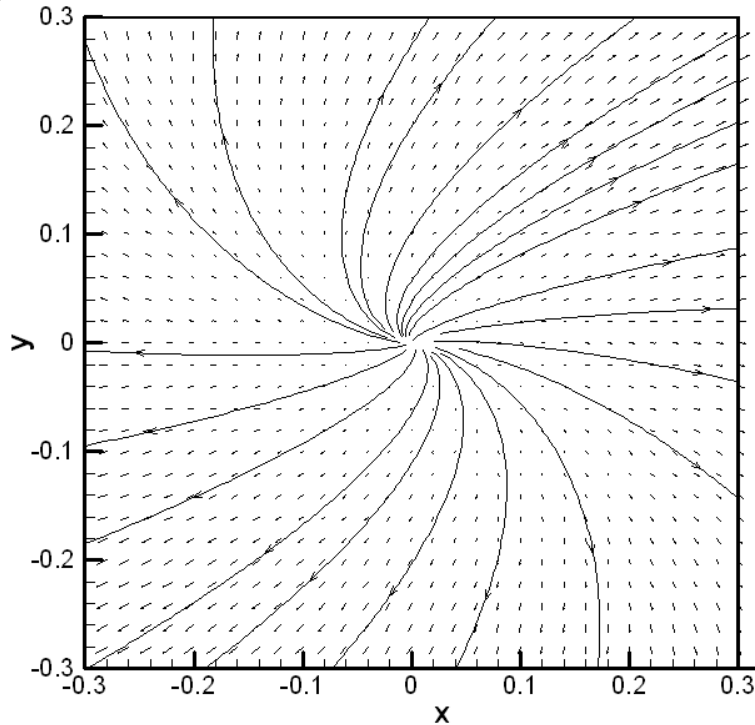


Figura 45. Línea de corriente para los vectores velocidad media, para un tiempo pequeño



3.6 VELOCIDADES MEDIAS DEL FLUIDO Y LAS PARTICULAS

Como ya se ha establecido la velocidad media del fluido viene dada por:

$$u_1 = \alpha y, \quad u_2 = 0$$

donde y es la posición y α es el esfuerzo cortante. La velocidad media de las partículas esta definida por las ecuaciones 15a y 15b. Como ya se ha comentado la velocidad media de las partículas evoluciona hasta alcanzar la velocidad media del fluido, la cual es únicamente no nula en la dirección x . Las Figuras 46, 47, 48 y 49 presentan el comportamiento de la componente x de la velocidad media de las partículas. Las gráficas 46, 47 y 48 presentan para la posición $x = 0$, $y = 0.1$. En la Figura 46 puede observarse el efecto de la variación del esfuerzo cortante en las respuestas de la velocidad media de las partículas (**C** y **D**) frente al valor constante del fluido (**A** y **B**). Las curvas **A** y **C** consideran $\alpha = 1$ y las curvas **B** y **D** $\alpha = 5$. Al incrementar el valor del esfuerzo cortante obviamente el valor de la velocidad es mayor. En la Figura 47 puede verse como la velocidad media de las partículas tiende a la velocidad media del fluido al variar β . Las partículas pequeñas alcanzan la velocidad media del fluido en tiempos relativamente cortos, mientras que las partículas más grandes tardan más, lo cual se observa en las curvas **B** (partícula grande) **C**, y **D** (partícula pequeña). El efecto de variar el esfuerzo de Reynolds es contrario al

del esfuerzo cortante: a medida que se incrementa el esfuerzo de Reynolds, el tiempo necesario para que la velocidad media de las partículas alcance la del fluido se reduce. Esto puede verse en la Figura 48 donde la curva **B** corresponde a un esfuerzo de Reynolds menor que en **D**. En la figura 49 se puede ver para un γ mucho mayor, $\gamma=0.9$, que el estilo de respuesta es el mismo solo cambia el valor de la velocidad media.

Figura 46. Velocidad media del fluido (A, B) y velocidad media de la partícula (CD). $\gamma=0.1$ A. $\alpha=1$, B. $\alpha=5$, C. $\alpha=1$ y D. $\alpha=5$. $\beta=1$ y $u_1' u_2' = 0$

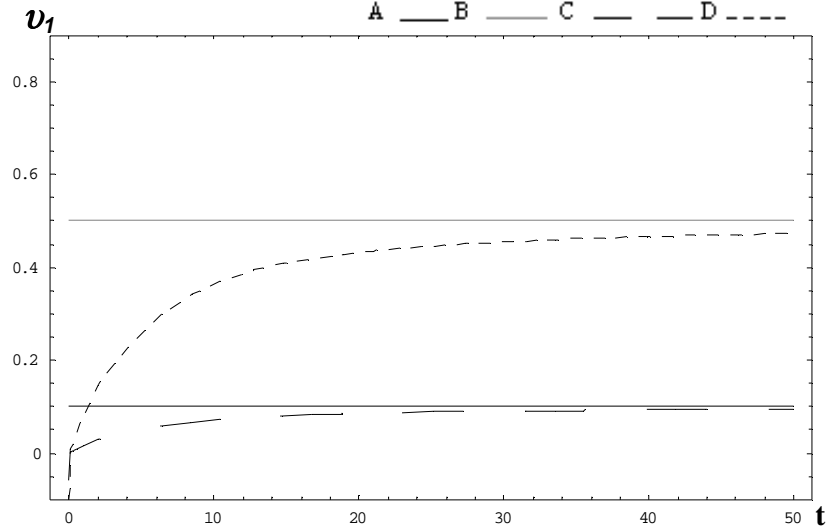


Figura 47. Velocidad media del fluido (A) y velocidad media de la partícula (B, C, D). $\gamma=0.1$ A. $\alpha=1$, B. $\beta=0.5$, C. $\beta=1$ y D. $\beta=50$. $\alpha=1$ y $u_1' u_2' = 0$

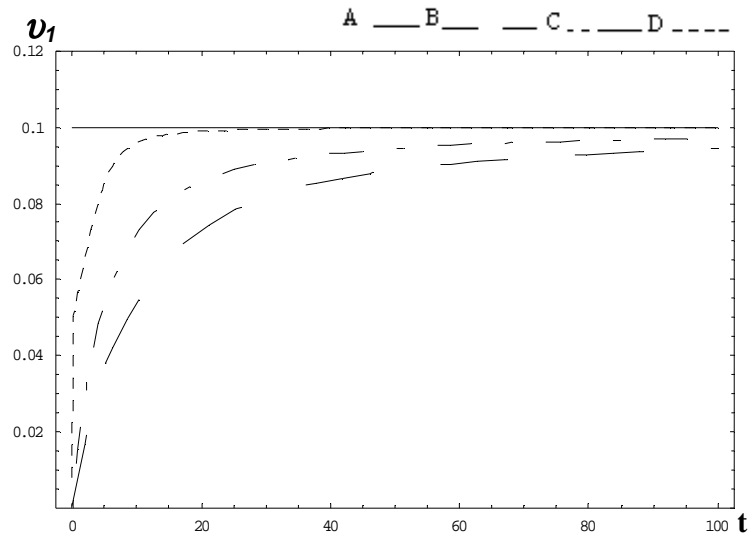


Figura 48. Velocidad media del fluido (A) y velocidad media de la partícula (B, C, D). $y=0.1$, A. $\alpha=1$, B. $u_1' u_2' = 0.1$, C. $u_1' u_2' = 0.5$ y D. $u_1' u_2' = 0.9$. $\beta=1$ y $\alpha=1$

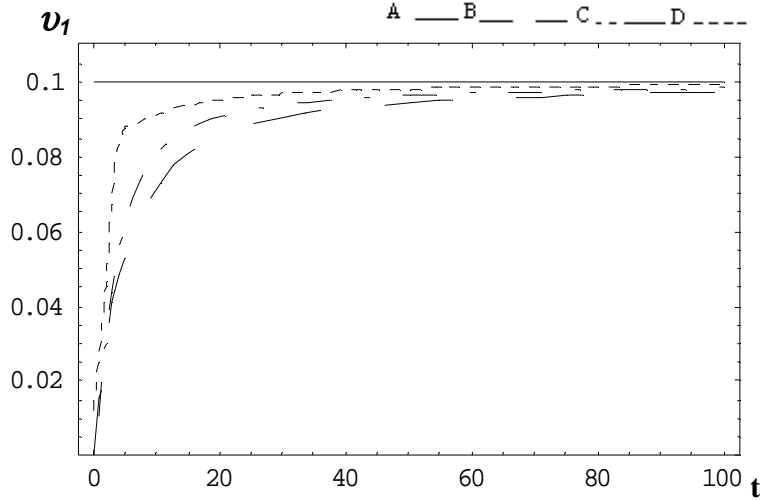
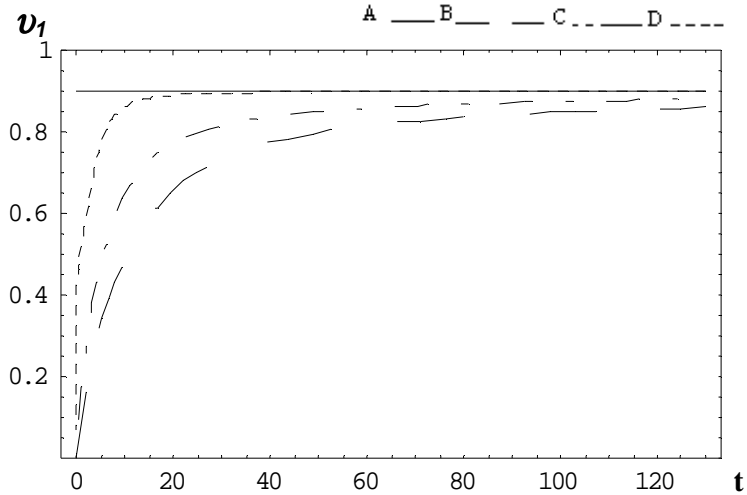


Figura 49. Velocidad media del fluido (A) y velocidad media de la partícula (B, C, D). $y=0.9$, A. $\alpha=1$, B. $\beta=0.5$, C. $\beta=1$ y D. $\beta=50$. $\alpha=1$ y $u_1' u_2' = 0$



3.7 ESFUERZOS DE REYNOLDS DE LAS PARTÍCULAS

En este apartado se estudia la evolución de los esfuerzos de Reynolds de las partículas. Es necesario hacer notar que la expresión de estos viene dada por las ecuaciones 17a, b y c y que, en el caso particular del flujo cortante simple, éstos son homogéneos, es decir, tienen el mismo valor en todos los puntos del dominio fluido. Este hecho se comprobó explícitamente durante el desarrollo del presente trabajo. Por otro lado, Zaichik (1997) determinó la expresión de

los esfuerzos de Reynolds de las partículas, en un flujo cortante simple, bajo la restricción de que el tiempo de evaluación t fuese suficientemente largo comparado con la escala temporal integral de la turbulencia, τ , y el tiempo de relajación de la partícula, β^{-1} . Las velocidades fluctuantes, i.e. esfuerzos de Reynolds, para las partículas derivados por Zaichik (1997) son:

Tabla 1. Ecuaciones de los esfuerzos de Reynolds de las partículas propuestas por Zaichik. Donde q_{xx} , q_{xy} y q_{yy} son los esfuerzos de Reynolds de las partículas.

$$q_{xx} = f_u p_{xx} - T_L p_{xy} \gamma_p + \tau_u l_u p_{xy} \gamma + \frac{\tau_u}{2} p_{yy} (T_L \gamma_p - \tau_u l_u \gamma) \gamma_p$$

$$q_{xy} = f_u p_{xy} - \frac{T_L}{2} p_{yy} \gamma_p + \frac{\tau_u}{2} l_u p_{yy} \gamma + \frac{\tau_u}{2} p_{yy} (T_L \gamma_p - \tau_u l_u \gamma) \gamma_p$$

$$q_{yy} = f_u p_{yy}$$

$$\gamma_p = \frac{dV_x}{dy}$$

$$\gamma = \alpha$$

$$f_u = \frac{1}{1 + \tau_u / T_L}$$

$$\tau_u = \beta^{-1}$$

$$T_L = \tau$$

$$l_u = f_u^2 \frac{T_L}{\tau_u}$$

$$q_{xx} = v'_1 v'_1$$

$$q_{xy} = v'_1 v'_2$$

$$q_{yy} = v'_2 v'_2$$

$$p_{xx} = u_1' u_1',$$

$$p_{xy} = u_1' u_2',$$

$$p_{yy} = u_1' u_2'.$$

Fuente: ZAICHIK, L. I, Modelling of the Motion of Particles in Non-Uniform Turbulent Flow using The Equation for the Probability Density Function. EN: J. Appl. Maths. Mechs. Vol. 61, (1997). p. 127-133.

En las Figuras 50 hasta la 57 las curvas **A**, **B** y **C** representan la evolución temporal de la velocidad fluctuante de las partículas expuesta por Zaichik (1997) y las curvas **D**, **E** y **F** la evolución de la velocidad fluctuante de las partículas obtenidas en este trabajo. Ambas velocidades fluctuantes tienden al mismo valor en iguales condiciones; sin embargo, las curvas obtenidas en este artículo necesitan más tiempo para alcanzar el valor de equilibrio. Ello no es extraño pues los perfiles de Zaichik parten de la premisa de que el tiempo de evaluación es suficientemente largo mientras que en nuestro caso se inicia exactamente desde cero por lo que se debe cumplir un transitorio más largo.

La componente $v_1'v_1'$ de los esfuerzos de Reynolds de las partículas en un flujo isotrópico y con presencia de esfuerzo cortante medio se puede ver en la Figura 50 donde se evalúa el efecto de modificar β sobre dicha componente. Las curvas **A** y **D** corresponden a $\beta=0.5$, **B** y **E** a $\beta=1$ y **C** y **F** a $\beta=50$. El comportamiento de $v_1'v_1'$ en el flujo no isotrópico, con presencia de esfuerzo cortante y tamaño intermedio de partícula, puede verse en la Figura 51, donde el valor estacionario es menor que cuando se presenta un flujo turbulento isotrópico; además este valor disminuye a medida que el esfuerzo de Reynolds del fluido aumenta. Cuando se incrementa el esfuerzo cortante, los valores de $v_1'v_1'$ de Zaichik (1997) y los obtenidos en este trabajo tienden a un valor muy grande, lo cual puede verse en la Figura 52.

En la Figura 53 las condiciones son iguales que en la Figura 50, pero se muestra la componente $v_1'v_2'$ del tensor de Reynolds de las partículas. $v_1'v_2'$, siendo negativo, disminuye en módulo conforme aumenta el tamaño de partícula hasta llegar a cero para β tendiendo a cero. En la Figura 54 las condiciones son iguales a las de la Figura 51, pero la componente del tensor de Reynolds de las partículas mostrada es $v_1'v_2'$. Ésta cruza el valor cero a medida que el esfuerzo de Reynolds del flujo va aumentando, para este caso particular. En la Figura 55 las condiciones son idénticas a las de la Figura 52, pero mostrando $v_1'v_2'$. Cuando el esfuerzo cortante medio aumenta, se observa que $v_1'v_2'$ tiende a un valor más negativo. La componente $v_2'v_2'$ de la velocidad fluctuante de la partícula expuesta en Zaichik (1997) corresponde a las condiciones de flujo homogéneo, i.e. no se ve afectada por el esfuerzo cortante medio, por lo que es independiente de α . Su comportamiento se puede observar en las Figuras 56 y 57. En la Figura 56 se pueden ver los efectos de variar el tamaño de la partícula en la componente $v_2'v_2'$. Igual que en la componente $v_1'v_2'$, al incrementar el tamaño de la partícula el valor del esfuerzo de Reynolds disminuye. En la Figura 57 se observa la tendencia del esfuerzo de Reynolds obtenido a un mismo valor del esfuerzo de Reynolds de Zaichik, esto se debe a que el resultados de las ecuaciones de Zaichik de la componente $v_2'v_2'$ no depende de la turbulencia.

Como se puede ver los valores obtenidos en este trabajo para los valores estacionarios de los esfuerzos de Reynolds de las partículas, hallados evaluando la solución general dada por Hyland et al. (1999), coinciden exactamente con los valores predichos por Zaichik (1997).

Figura 50. Velocidad fluctuante, componente $v_1'v_1'$. A-D. $\beta=0.5$, B-E. $\beta=1$ y C-F. $\beta=50$. $\alpha=1$ y $u_1'u_2'=0$

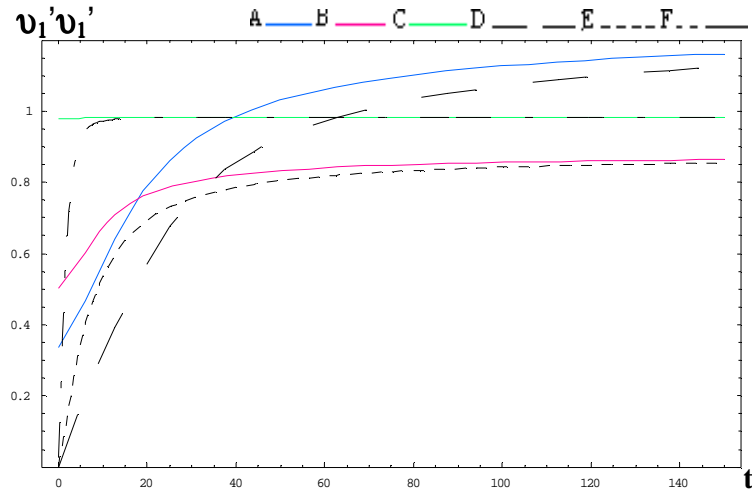


Figura 51. Velocidad fluctuante, componente $v_1'v_1'$. A-D. $u_1'u_2'=0.1$, B-E. $u_1'u_2'=0.5$ y C-F. $u_1'u_2'=0.9$. $\beta=1$ y $\alpha=1$

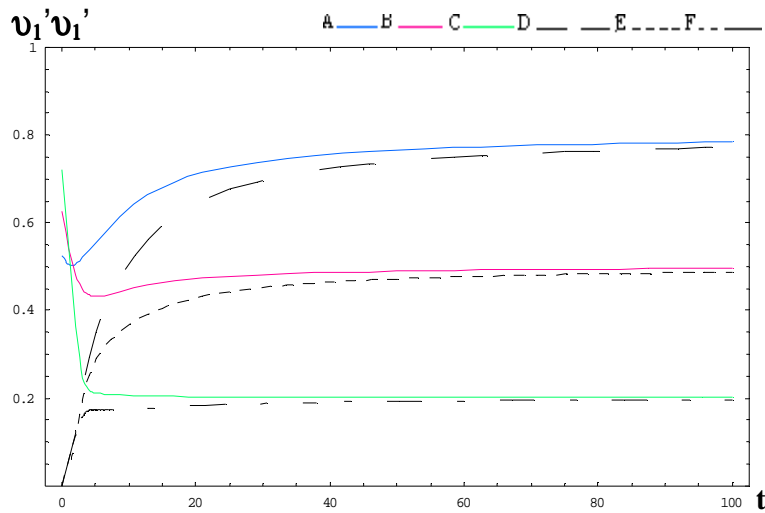


Figura 52. Velocidad fluctuante, componente $v_1'v_1'$. A-D. $\alpha=0$, B-E. $\alpha=1$ y C-F. $\alpha=5$. $\beta=1$ y $u_1'u_2'=0$

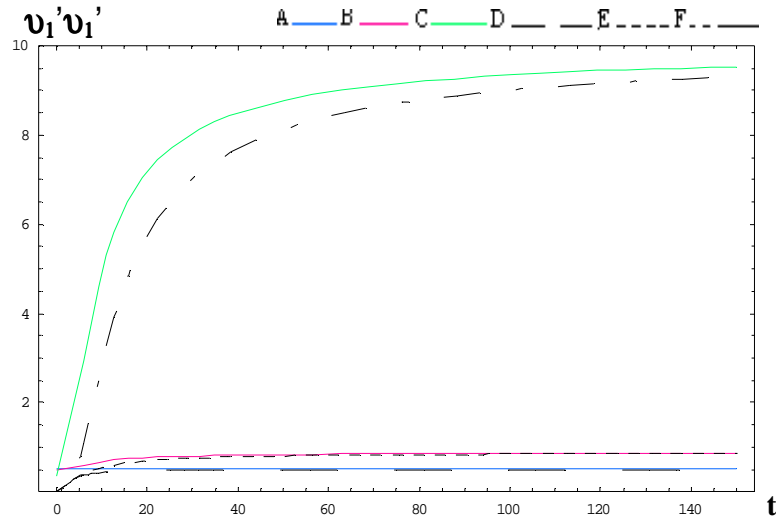


Figura 53. Velocidad fluctuante, componente $v_1'v_2'$. A-D. $\beta=0.5$, B-E. $\beta=1$ y C-F. $\beta=50$. $\alpha=1$ y $u_1'u_2'=0$

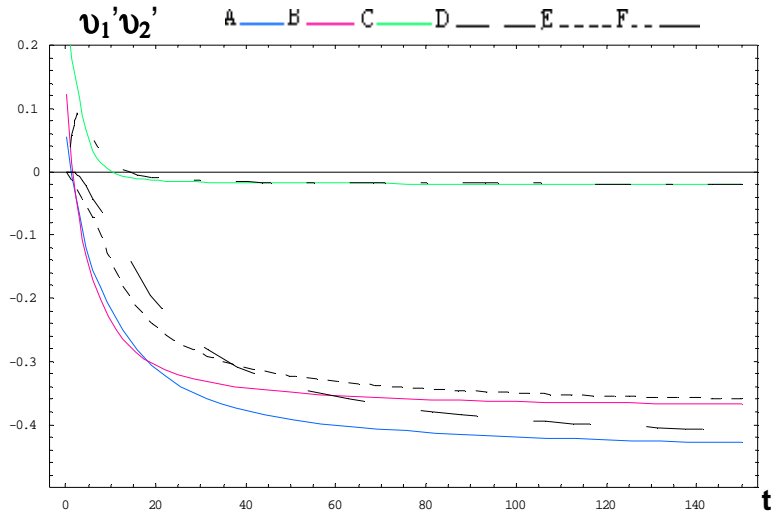


Figura 54. Velocidad fluctuante, componente $v_1'v_2'$. A-D. $u_1'u_2'=0$, B-E. $u_1'u_2'=0.5$ y C-F. $u_1'u_2'=0.9$. Para un $\beta=1$ y $\alpha=1$

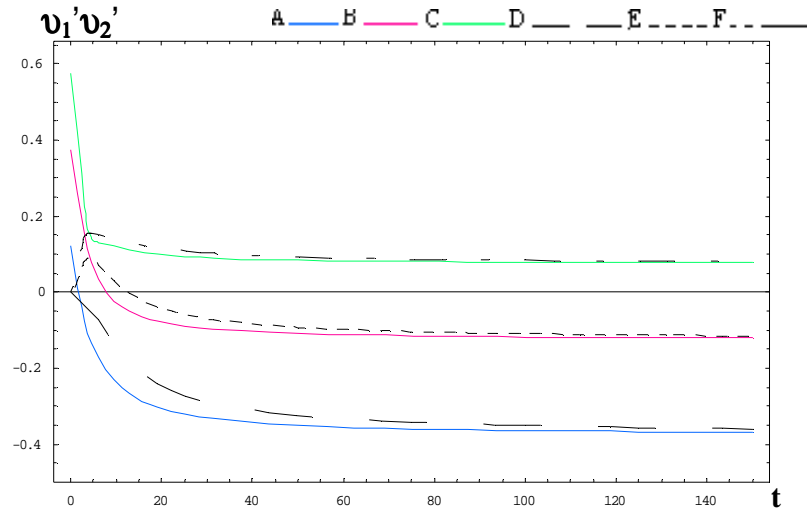


Figura 55. Velocidad fluctuante, componente $v_1'v_2'$. A-D. $\alpha=0$, B-E. $\alpha=1$ y C-F. $\alpha=5$. $\beta=1$ y $u_1'u_2'=0$

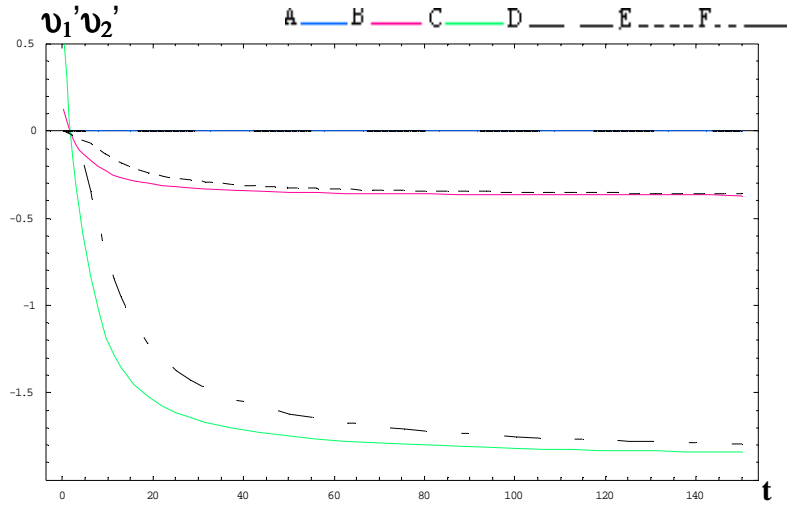


Figura 56 Velocidad fluctuante, componente $v_2'v_2'$. A-D. $\beta=0.5$, B-E. $\beta=1$ y C-F. $\beta=50$. Para un $\alpha=0$ y $u_1'u_2'=0$

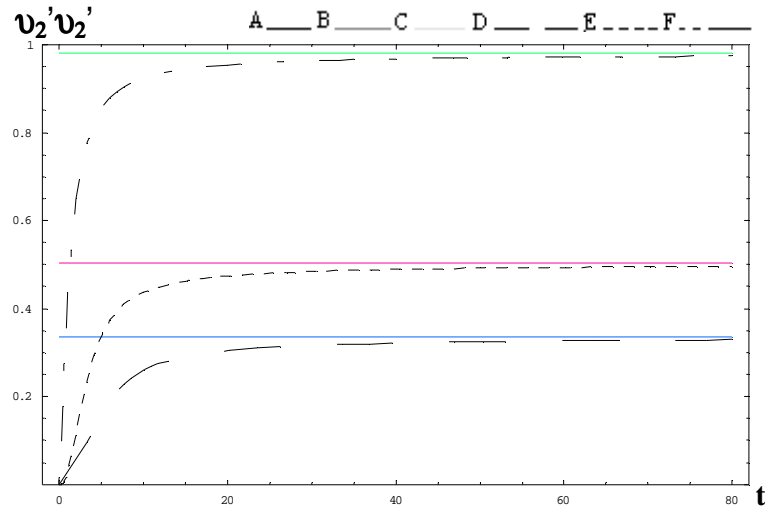
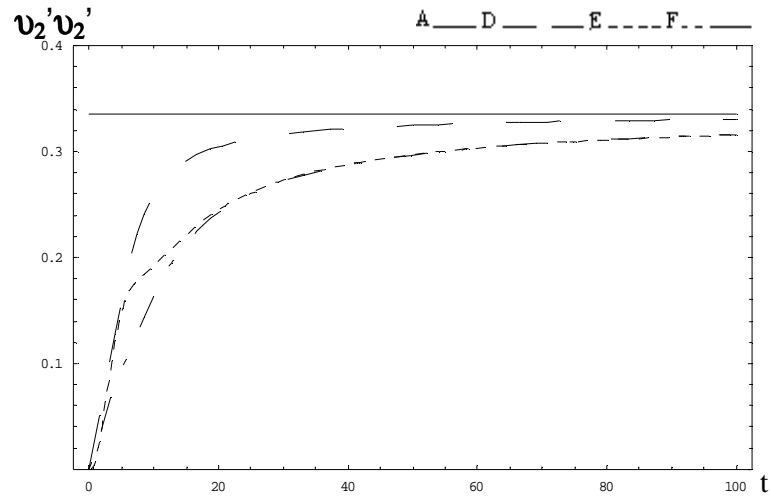


Figura 57. Velocidad fluctuante, componente $v_2'v_2'$. A. $\beta=0.5$, D. $\alpha=0$, E. $\alpha=1$ y F. $\alpha=5$. $\beta=0.5$ y $u_1'u_2'=0$



3.8 TENSORES DE DISPERSION TURBULENTO DE PARTICULAS

Zaichik (1997) presenta las componentes del tensor dispersión turbulenta de partículas inerciales en el flujo cortante simple en la siguiente forma

Tabla 2. Tensores de dispersión de las partículas propuestos por Zaichik

$$D_{p_{xx}} = \tau_u (q_{xx} + g_u p_{xx}) + \tau_u^2 h_u p_{xy} \gamma$$

$$D_{pxy} = \tau_u (q_{xy} + g_u p_{xy}) + \tau_u^2 h_u p_{yy} \gamma$$

$$D_{pyx} = \tau_u (q_{xy} + g_u p_{xy})$$

$$D_{pyy} = \tau_u (q_{yy} + g_u p_{yy})$$

Fuente: ZAICHIK, L. I. Modelling of the Motion of Particles in Non-Uniform Turbulent Flow using The Equation for the Probability Density Function. EN: J. Appl. Maths. Mechs. Vol. 61, (1997). p. 127-133.

Donde $g_u = \frac{\beta^2 \tau^2}{1 + \beta \tau}$ y D_{pxx} , D_{pxy} , D_{pyx} y D_{pyy} son los tensores de dispersión de las partículas.

Estas expresiones se ilustran en las Figuras 58 hasta 65, donde se puede observar la evolución temporal de las componentes del tensor. En la Figura 58 puede verse que a medida que las partículas van aumentando de tamaño, los valores límite de la componente D_{pxx} y el tiempo necesario para el equilibrio aumentan.

En las Figuras 59 y 60, se presentan las componentes D_{pxy} y D_{pyx} cuyas respuestas **A**, **B** y **C** son asimétricas. Conforme se incrementa el tamaño de partícula, las componentes de los tensores van a tender a valores negativos e igual que el caso anterior el tiempo necesario para que las componentes del tensor alcancen sus valores de equilibrio va a aumentar.

En la Figura 61 se observa que la componente D_{pyy} , alcanza el mismo valor para partículas de cualquier tamaño, pero el tiempo transcurrido para alcanzarlo es mayor a medida que aumenta el tamaño de la partícula.

Figura 58. Comportamiento del tensor de dispersión D_{pxx} . A. $\beta=0.5$, B. $\beta=1$, C. $\beta=5$. $\alpha=1$ y $u_1' u_2' = 0$

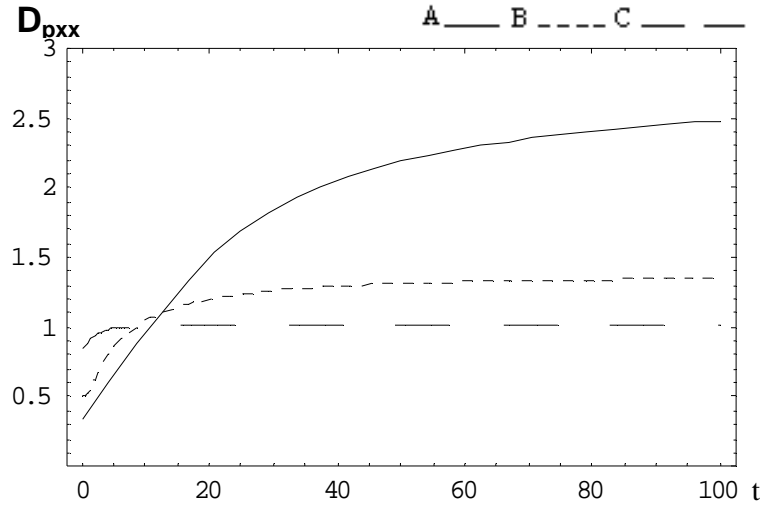


Figura 59. Comportamiento del tensor de dispersión D_{pxy} . A. $\beta=0.5$, B. $\beta=1$, C. $\beta=5$. Para un $\alpha=1$ y $u_1' u_2' = 0$

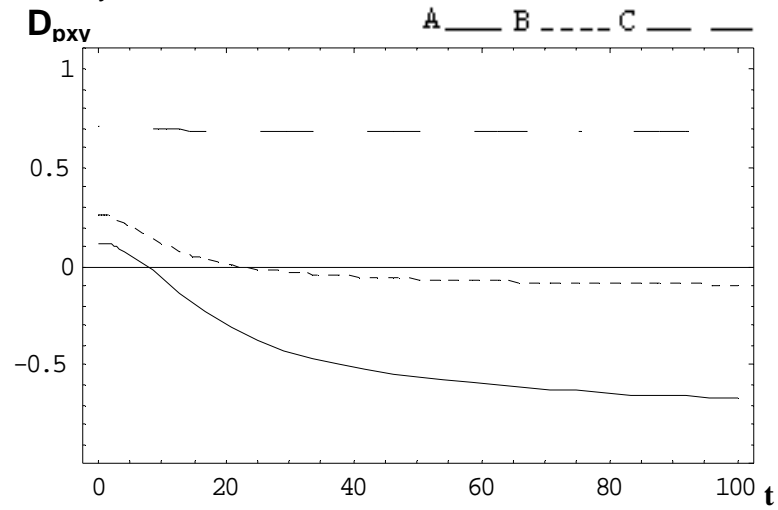


Figura 60. Comportamiento del tensor de dispersión D_{pyx} . A. $\beta=0.5$. B. $\beta=1$. C. $\beta=5$. Para un $\alpha=1$ y $u_1' u_2' = 0$

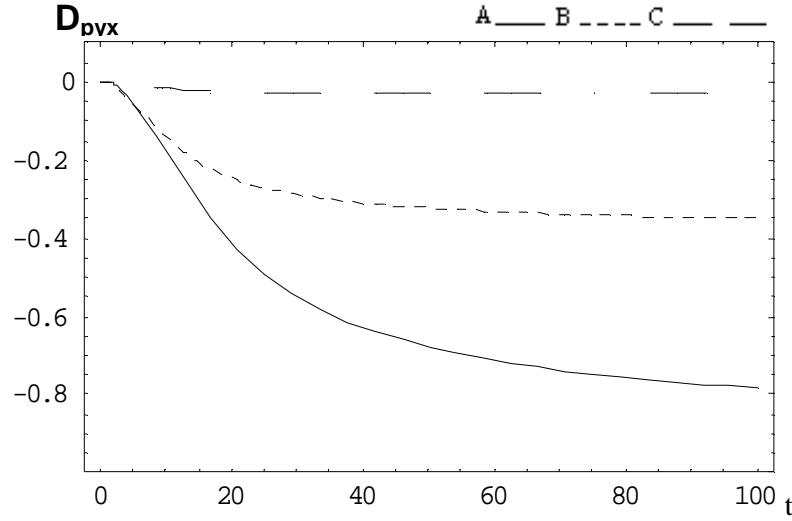
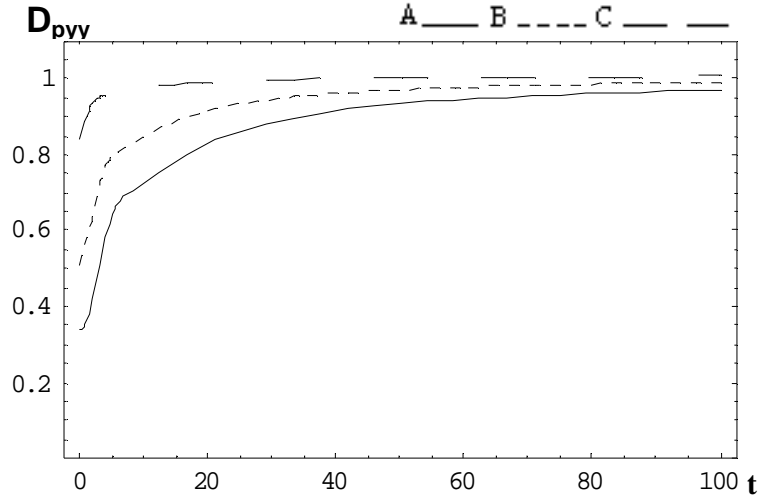


Figura 61. Comportamiento del tensor de dispersión D_{pyy} . A. $\beta=0.5$. B. $\beta=1$. C. $\beta=5$. Para un $\alpha=1$ y $u_1' u_2' = 0$



En las Figuras 62 hasta 65 puede observarse el comportamiento de las componentes del tensor de dispersión cuando se varía el esfuerzo de Reynolds del flujo, en el caso donde hay presencia de esfuerzo cortante medio y el tamaño de partícula es intermedio. En la Figura 62 se aprecia la componente del tensor D_{pxx} donde conforme se incrementa el esfuerzo de Reynolds, el valor estacionario de esta componente y el tiempo necesario para ello disminuyen. En las Figuras 63 y 64 puede observarse una vez más que las componentes del tensor D_{pxy} y D_{pyx} , son asimétricas y conforme se incrementa el esfuerzo de Reynolds del flujo, los valores de las componentes del tensor van aumentando y el tiempo necesario para alcanzar el valor estacionario disminuye. La componente D_{pyy} mostrada en la Figura 65, mantiene el mismo perfil

independientemente del esfuerzo de Reynolds del fluido tal y como se esperaba.

Figura 62. Comportamiento del tensor de dispersión $D_{p_{xx}}$. A. $u_1' u_2' = 0.1$, B. $u_1' u_2' = 0.5$, y C. $u_1' u_2' = 0.9$. $\alpha=1$ y $\beta=1$

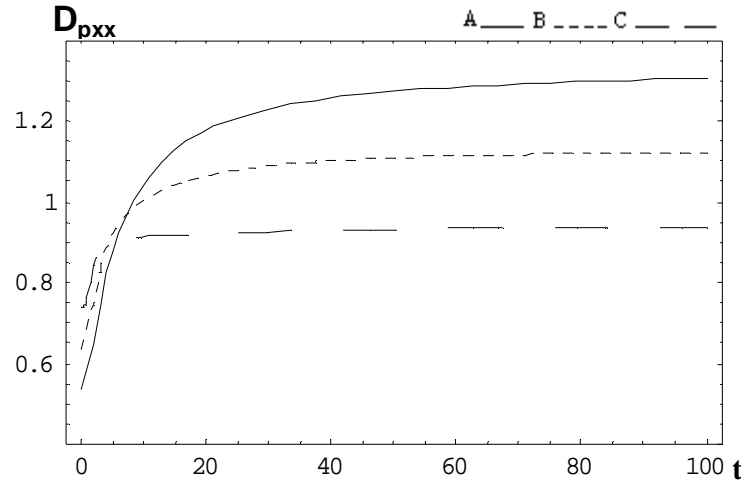


Figura 63. Comportamiento del tensor de dispersión $D_{p_{xy}}$. A. $u_1' u_2' = 0.1$, B. $u_1' u_2' = 0.5$ y C. $u_1' u_2' = 0.9$. $\alpha=1$ y $\beta=1$.

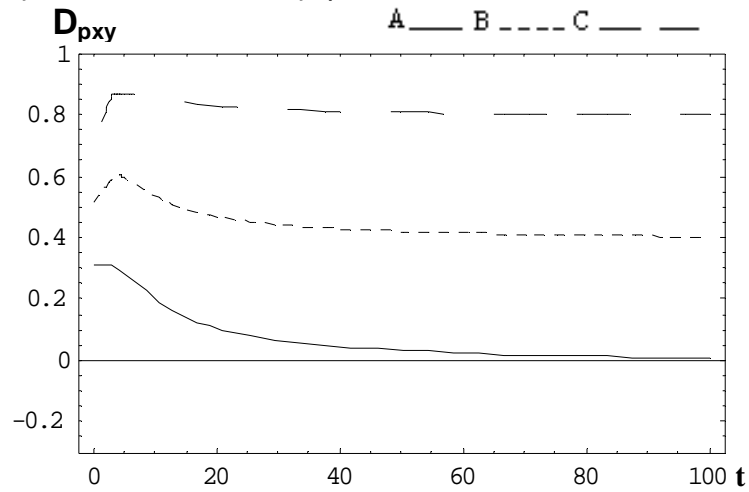


Figura 64. Comportamiento del tensor de dispersión D_{pyx} . A. $u_1' u_2' = 0.1$, B. $u_1' u_2' = 0.5$ y C. $u_1' u_2' = 0.9$. $\alpha=1$ y $\beta=1$

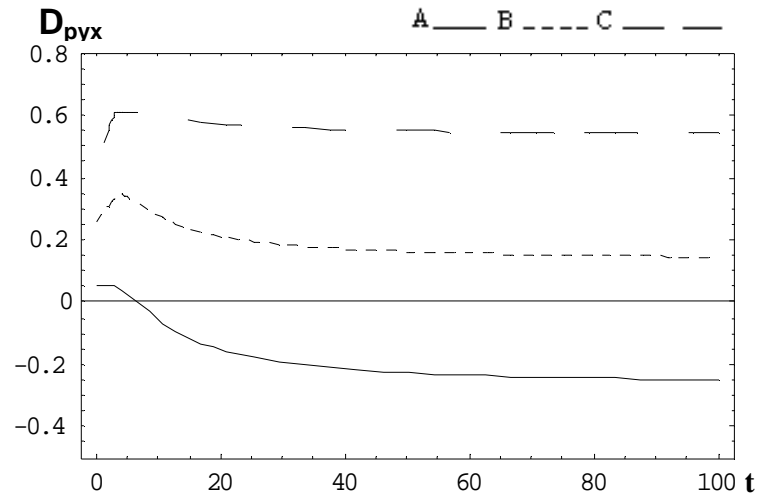
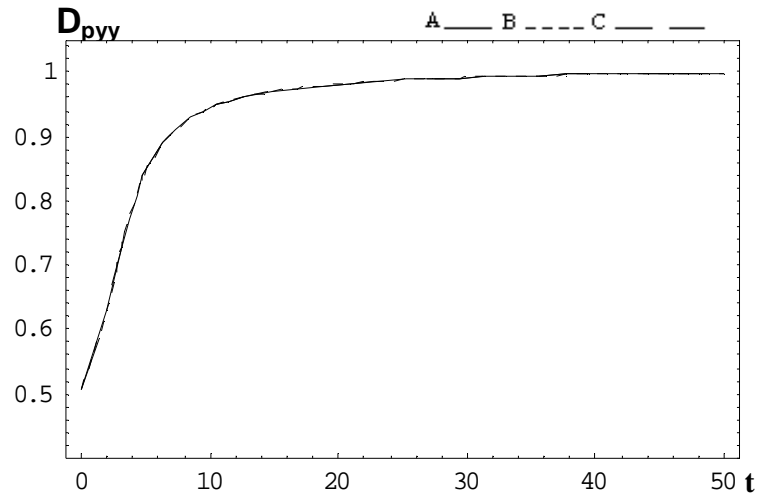


Figura 65. Comportamiento del tensor de dispersión D_{pyy} . A. $u_1' u_2' = 0.1$ y B. $u_1' u_2' = 0.5$. C. $u_1' u_2' = 0.9$. $\alpha=1$ y $\beta=1$



4. CONCLUSIONES

La solución general para la dispersión de partículas inerciales en un flujo turbulento cortante simple desarrollada por Hyland et al. (1999) ha sido implementada en el paquete de matemática simbólica Mathematica versión 5 (Wolfram, 1989). Dicha solución general ha sido evaluada en diferentes situaciones construidas a partir de una modificación sistemática de los valores de los parámetros, tanto del flujo como de las partículas, de las que depende.

En particular, se han reproducido satisfactoriamente las soluciones numéricas presentadas en Hyland et al. (1999) en dos dimensiones espaciales. Adicionalmente, la variación de los parámetros significativos relevantes (tamaño de partícula, esfuerzo cortante medio, esfuerzos de Reynolds del flujo) ha permitido establecer su efecto en la solución general. En particular se ha estudiado su influencia sobre la función densidad de probabilidad (pdf), concentración, velocidad media y esfuerzos de Reynolds de las partículas. Esta última variable se ha comparado frente a la solución presentada en Zaichik (1997), válida para tiempos largos comparados con el tiempo de relajación de la partícula y la escala temporal integral de la turbulencia del flujo portador, obteniéndose idénticos valores estacionarios.

Concretamente, cuando hay presencia de esfuerzo cortante medio los perfiles de concentración de las partículas son elipses rotadas y a medida que éste se incrementa, los perfiles se van estirando. Las partículas pequeñas se difunden más rápido en el flujo turbulento que las partículas grandes, más inerciales. Los esfuerzos de Reynolds turbulentos también rotan los perfiles de concentración de partículas. Conforme transcurre el tiempo, los perfiles de concentración de las partículas se estiran y expanden.

BIBLIOGRAFIA

FOX, Rober W y MCDONALD, Alan T. Introducción a la mecánica de fluidos. 2 ed. Mexico D.F: McGraw-Hill, 1995. 916 p.

GRILLO, Cristian Andrés. Dispersión de partículas sólidas en flujos bifásicos turbulentos. Santiago de Cali, 2005. 131 p. Tesis (Ingeniero Mecánico). Universidad Autónoma de Occidente. Facultad de Ingenierías.

HYLAND, K. E., MCKEE, S and REEKS, M. W. Exact Analytic solutions to turbulent particle flow equations. En: Physics of Fluids. Vol. 11 (1999); p. 1249-1261.

REEKS, M. W. On a kinetic equation for the transport of particles in turbulent flow. En: Physics of Fluids. Vol. 3 (1991); 446 p.

POPE, S. B. Methods for turbulent reactive flow. En: Energy Combust. Sci. Vol. 11, (1985); 119 p.

POTTER, Merle C y WIGGERT, David C. Mecánica de fluidos. 2 ed. Mexico D.F: Prentice Hall, 1997. 752 p.

WOLFRAM, S. Mathematica a system for doing mathematics by computer. 4 ed. Redwood City, California: Wesley, 1988. 749 p.

ZAICHIK, L. I. Modelling of the motion of particles in non-uniform turbulent flow using the equation for the probability density function. En: J. Appl, Maths. Mechs. Vol. 61 (1997); p.127-133.

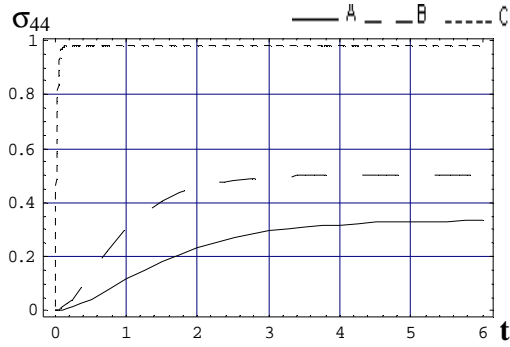
ANEXOS

Anexo A: tensores de dispersión λ y μ

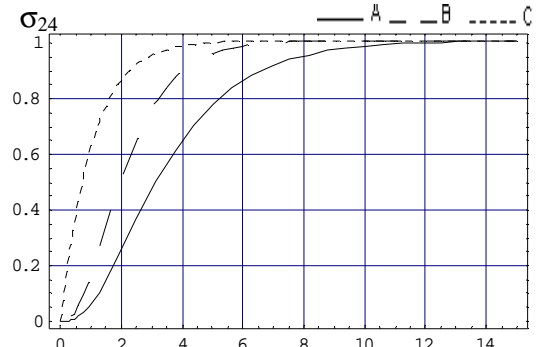
$$\begin{aligned}\lambda_{ij}(t) = & \langle f_i f_j \rangle \frac{\tau}{\beta(\beta\tau + 1)} \left[(\beta\tau + 1)(1 - e^{-t/\tau}) + (e^{-(\beta\tau+1)t/\tau} - 1) \right] + \delta_{il} \langle f_2 f_j \rangle \frac{2\alpha\tau}{\beta^2(\beta\tau + 1)} \\ & \times \left[(1 - e^{-(\beta\tau+1)t/\tau}) + (\beta\tau + 1)(e^{-t/\tau} - 1) \right] + \delta_{il} \langle f_2 f_j \rangle \frac{\alpha\tau^2}{\beta(\beta\tau + 1)^2} \\ & \times \left[(1 - e^{-(\beta\tau+1)t/\tau}) - (\beta\tau + 1)^2 (e^{-t/\tau} - 1) \right] \\ & - \delta_{il} \langle f_2 f_j \rangle \frac{\alpha\tau}{\beta(\beta\tau + 1)} \left[(\beta\tau + 1)e^{-t/\tau} + e^{-(\beta\tau+1)t/\tau} \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_{ij}(t) = & \langle f_i f_j \rangle \frac{\tau}{\beta\tau + 1} (1 - e^{-(\beta\tau+1)t/\tau}) + \delta_{il} \langle f_2 f_j \rangle \\ & \times \frac{\alpha\tau}{(\beta\tau + 1)^2} e^{-(\beta\tau+1)t/\tau} \left[t(\beta\tau + 1) + \tau(1 - e^{(\beta\tau+1)t/\tau}) \right] \\ & + \delta_{il} \langle f_2 f_j \rangle \frac{\alpha\tau}{\beta(\beta\tau + 1)} \left[(\beta\tau + 1)(1 - e^{-t/\tau}) + (e^{-(\beta\tau+1)t/\tau} - 1) \right]\end{aligned}$$

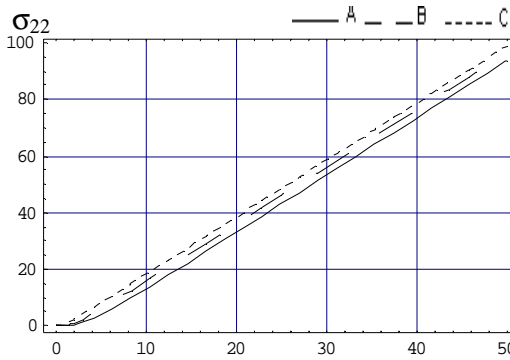
Anexo B. Comportamiento de las variables; a) σ_{44} , b) σ_{24} , c) σ_{22} , d) σ_{34} , e) σ_{14} y f) σ_{23} . Variando en tamaño de la partícula.



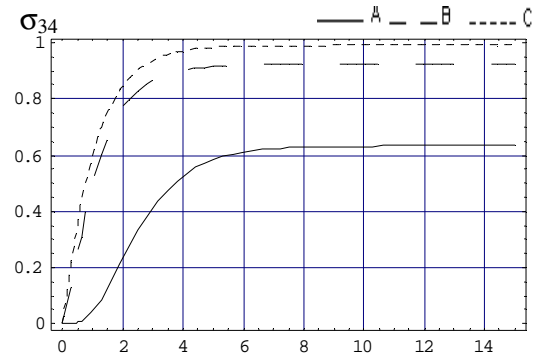
a) Comportamiento de la variable σ_{44} , para un A) $\beta=1$, B) $\beta=10$ y C) $\beta=50$



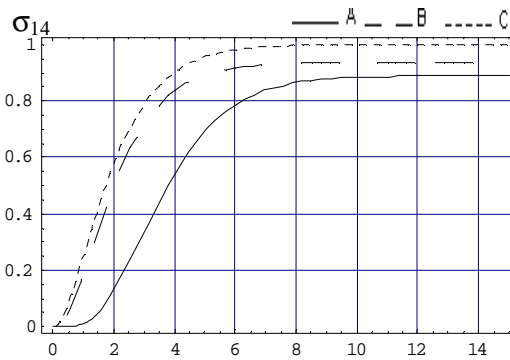
b) Comportamiento de la variable σ_{24} , para un A) $\beta=1$, B) $\beta=10$ y C) $\beta=50$



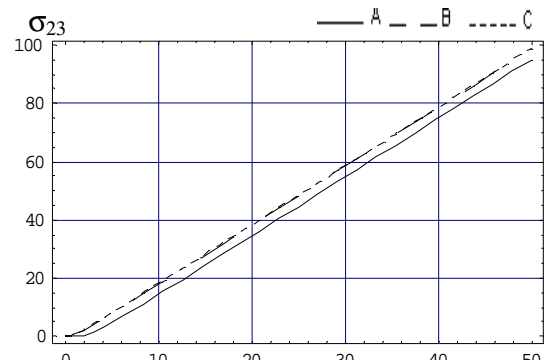
c) Comportamiento de la variable σ_{22} , para un A) $\beta=1$, B) $\beta=10$ y C) $\beta=50$



d) Comportamiento de la variable σ_{34} , para un A) $\beta=1$, B) $\beta=10$ y C) $\beta=50$. $\alpha=1$ y $u_1' u_2' = 0$

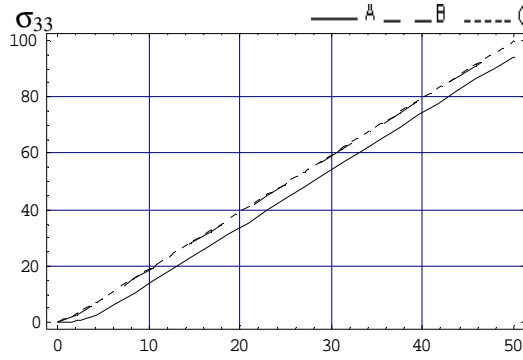


e) Comportamiento de la variable σ_{14} , para un A) $\beta=1$, B) $\beta=10$ y C) $\beta=50$. $\alpha=1$ y $u_1' u_2' = 0$

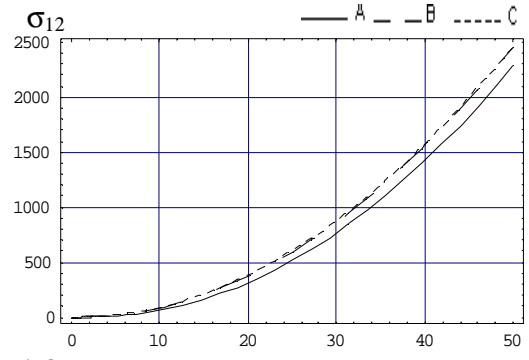


f) Comportamiento de la variable σ_{23} , para un A) $\beta=1$, B) $\beta=10$ y C) $\beta=50$. $\alpha=1$ y $u_1' u_2' = 0$

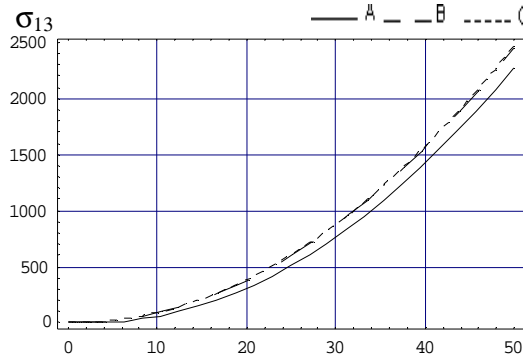
Anexo C. Comportamiento de las variables; a) σ_{33} , b) σ_{12} , c) σ_{13} , d) σ_{11} variando en tamaño de la partícula. Y e) σ_{34} y f) σ_{14} variando el esfuerzo cortante de la partícula.



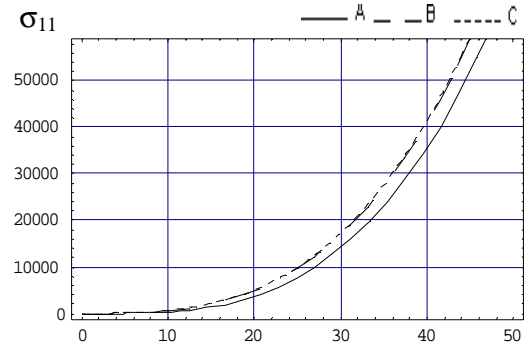
a) Comportamiento de la variable σ_{33} , para un A) $\beta=1$, B) $\beta=10$ y C) $\beta=50$. $\alpha=1$ y $u_1' u_2' = 0$



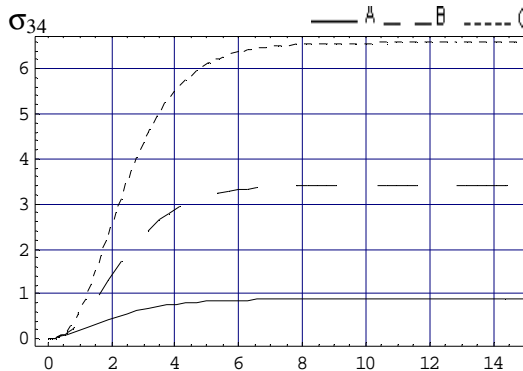
b) Comportamiento de la variable σ_{12} , para un A) $\beta=1$, B) $\beta=10$ y C) $\beta=50$. $\alpha=1$ y $u_1' u_2' = 0$



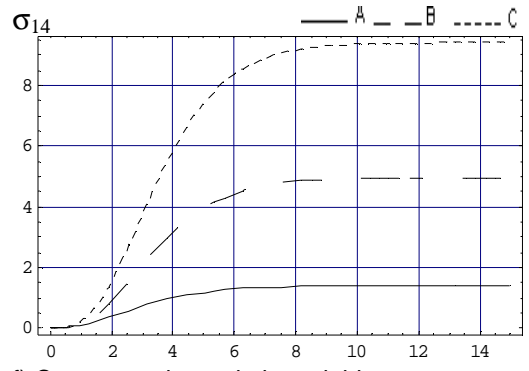
c) Comportamiento de la variable σ_{13} , para un A) $\beta=1$, B) $\beta=10$ y C) $\beta=50$. $\alpha=1$ y $u_1' u_2' = 0$



d) Comportamiento de la variable σ_{11} , para un A) $\beta=1$, B) $\beta=10$ y C) $\beta=50$. $\alpha=1$ y $u_1' u_2' = 0$

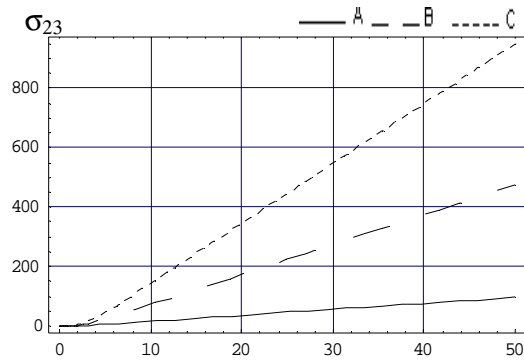


e) Comportamiento de la variable σ_{34} , para un A) $\alpha=1$, B) $\alpha=5$ y C) $\alpha=10$. $\beta=1$ y $u_1' u_2' = 0.5$

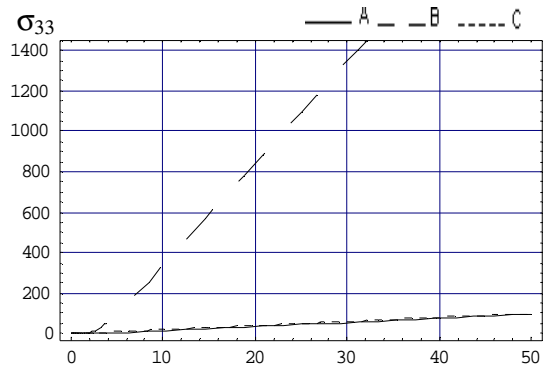


f) Comportamiento de la variable σ_{14} , para un A) $\alpha=1$, B) $\alpha=5$ y C) $\alpha=10$. $\beta=1$ y $u_1' u_2' = 0.5$

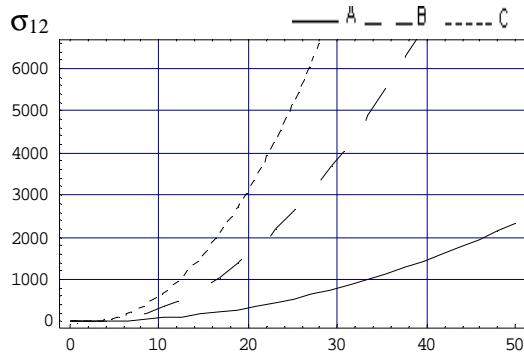
Anexo D. Comportamiento de las variables; a) σ_{23} , b) σ_{33} , c) σ_{12} , d) σ_{13} y f) σ_{11} , variando el esfuerzo cortante de la partícula.



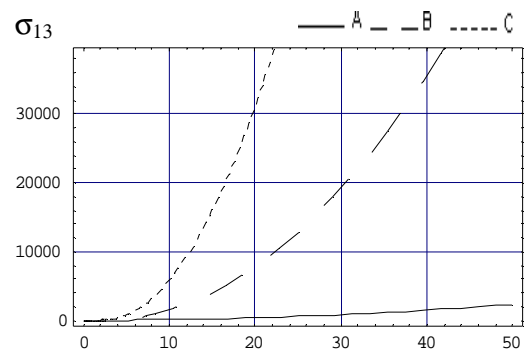
a) Comportamiento de la variable σ_{23} , para un A) $\alpha=1$, B) $\alpha=5$ y C) $\alpha=10$. $\beta=1$ y $u_1' u_2' = 0.5$



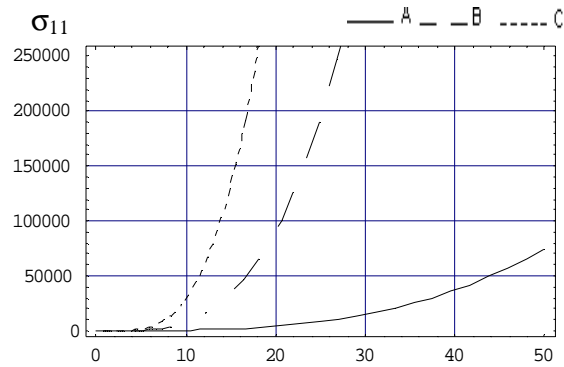
b) Comportamiento de la variable σ_{33} , para un A) $\alpha=1$, B) $\alpha=5$ y C) $\alpha=10$. $\beta=1$ y $u_1' u_2' = 0.5$



c) Comportamiento de la variable σ_{12} , para un A) $\alpha=1$, B) $\alpha=5$ y C) $\alpha=10$. $\beta=1$ y $u_1' u_2' = 0.5$



d) Comportamiento de la variable σ_{13} , para un A) $\alpha=1$, B) $\alpha=5$ y C) $\alpha=10$. $\beta=1$ y $u_1' u_2' = 0.5$



e) Comportamiento de la variable σ_{11} , para un A) $\alpha=1$, B) $\alpha=5$ y C) $\alpha=10$. $\beta=1$ y $u_1' u_2' = 0.5$